

Travaux Dirigés de Programmation Fonctionnelle

«Compilation»

I Combinateurs

Démontrer les égalités suivantes entre des expressions applicatives utilisant des combinateurs :

1. $S K K 1 = I 1$
2. $S (K (+ 1)) (K 2) 3 = K (+ 1 2) 3$
3. $S (S (K +) (K 2)) I 3 = + 2 3$
4. $\text{Apply} (\text{Pair} (\text{Curry} \text{ Snd}) (\text{Quote} 2) (\text{Quote} 1)) = 2$

On rappelle ci-dessous la définition des combinateurs S, K et I et des combinateurs catégoriques :

$$\begin{aligned}
 S g d x &= (g x) (d x) \\
 K x y &= x \\
 I x &= x \\
 \text{Fst} (x, y) &= x \\
 \text{Snd} (x, y) &= y \\
 (\text{Quote} x) y &= x \\
 (\text{Curry} f) y z &= f (y, z) \\
 (\text{Pair} x y) z &= (x z, y z) \\
 \text{Apply} (x, y) &= x y
 \end{aligned}$$

II Compilation

Compiler les λ -expressions suivantes (on devra au préalable utiliser la notation de De Bruijn).

1. $\lambda x. (+ 1 x) 2$
2. $\lambda x. \lambda y. x 1 2$
3. $\lambda x. (x 4 (\lambda x. x 3)) +$

On rappelle ci-dessous la définition de la fonction, *comb*, de traduction d'une λ -expression en code pour la CAM :

$$\begin{aligned}
 \text{comb}(\text{Ln}) &= \underbrace{\text{Fst} (\text{Fst} (\dots (\text{Fst} \text{ Snd}) \dots))}_{n \times} \\
 \text{comb}(k) &= \text{Quote } k \\
 \text{comb}(f) &= \text{Curry } (\text{Snd } f) \\
 \text{comb}(M N) &= \text{Apply } (\text{Pair } (\text{comb}(M)) (\text{comb}(N))) \\
 \text{comb}(\lambda.M) &= \text{Curry } (\text{comb}(M))
 \end{aligned}$$

III Séquence d'instructions

Traduire les expressions applicatives de l'exercice II en une séquence d'instructions pour la CAM. On rappelle ci-dessous les instructions correspondantes à chaque combinateur :

Combinateur	Notation
Fst	[Fst]
Snd	[Snd]
Quote x	[$'x$]
Curry f	[$\wedge(f)$]
Pair $x y$	[$\langle \rangle @x [,] @y @ \rangle$]
Apply c	$c @ [\text{app}]$

IV Exécution du code

Dérouler l'exécution par la CAM des séquences d'instructions de l'exercice III. On rappelle ci-dessous la fonction de transition d'état de la CAM :

$$\begin{array}{llllll}
 ((s, t) & \text{Fst} :: C & S) & \Rightarrow & (s & C & S) \\
 ((s, t) & \text{Snd} :: C & S) & \Rightarrow & (t & C & S) \\
 (s & 'c :: C & S) & \Rightarrow & (c & C & S) \\
 (s & \wedge(C) :: C_1 & S) & \Rightarrow & ((C s) & C_1 & S) \\
 (s & \langle :: C & S) & \Rightarrow & (s & C & s :: S) \\
 (t & , :: C & s :: S) & \Rightarrow & (s & C & t :: S) \\
 (t & \rangle :: C & s :: S) & \Rightarrow & ((s, t) & C & S) \\
 ((C s, t) & \text{app} :: C_1 & S) & \Rightarrow & ((s, t) & C @ C_1 & S) \\
 (m & + :: C & S) & \Rightarrow & (+ m & C & S) \\
 ((m, n) & + :: C & S) & \Rightarrow & (add(m, n) & C & S)
 \end{array}$$