

# Travaux Dirigés de Programmation Fonctionnelle

## « $\lambda$ -calcul»

### I Syntaxe

Pour chacune des  $\lambda$ -expressions :

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\lambda x.(\lambda y.(+ x 3))$                                 | (b) $\lambda p.(\lambda q.p \lambda x.(x p)) \lambda i.\lambda j.(j i)$ |
| (c) $\lambda x.\lambda y.\lambda z.((+ 3 x) y) z 5 \pi$             | (d) $\lambda x.\lambda y.\lambda z.((z x) (z y))$                       |
| (e) $\lambda x.(x 3)$   | (f) $\lambda a.(a \lambda b.(b a))$                                     |
| (g) $\lambda f.\lambda g.(\lambda h.(g h) f) \lambda p.\lambda q.p$ | (h) $\lambda e.\lambda i.\lambda o.\lambda u.(u (o (i e)))$             |

1. Déterminer s'il s'agit d'une constante, d'une variable, d'une abstraction ou d'une application, et faire de même pour toutes les sous-expressions.
2. Oter les parenthèses inutiles.
3. Parenthèser complètement.

### II Signification

Pour chacune des abstractions suivantes, indiquer si elle peut être interprétée comme une fonction anonyme. Si oui, laquelle ?

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\lambda x.(\lambda y.(+ x 3))$               | (b) $\lambda f.(* (+ 3 2) 5)$                               |
| (c) $\lambda x.(x 3)$                             | (d) $\lambda x.(x x)$                                       |
| (e) $\lambda x.(3 x)$                             | (f) $\lambda e.\lambda i.\lambda o.\lambda u.(u (o (i e)))$ |
| (g) $\lambda x.\lambda y.\lambda z.((z x) (z y))$ | (h) $\lambda a.(a \lambda b.(b a))$                         |

### III Réduction

Réduire les  $\lambda$ -expressions suivantes en utilisant la  $\beta$ -conversion. Indiquer le redex avec le symbole  $\lambda$ . (Ces expressions sont telles que le problème de capture de variable ne se pose pas) :

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\lambda a.\lambda b.(+ a b) 5$                                 | (b) $\lambda x.(+ x x) (\lambda y.y z)$                             |
| (c) $\lambda c.\lambda v.\lambda f.((c v) f) \lambda x.\lambda y.x$ | (d) $(\lambda x.\lambda y.(y x) \lambda p.\lambda q.p) \lambda i.i$ |

- (e)  $((\lambda x. \lambda y. \lambda z. ((x y) z) \lambda f. \lambda a. (f a)) \lambda i. i) \lambda j. j$
- (f)  $\lambda h. ((\lambda a. \lambda f. (f a) h) h) \lambda g. (g g)$
- (g)  $(\lambda p. \lambda q. (p q) (\lambda x. x \lambda a. \lambda b. a)) \lambda k. k$
- (h)  $\lambda n. \lambda f. \lambda x. (f (n f x)) \lambda f. \lambda x. (f x)$

## IV Variables libres et liées

Pour chacune des  $\lambda$ -expressions suivantes et pour chaque occurrence de variable, indiquer si la variable est libre ou liée.

- |  |  |
|--|--|
| (a) $\lambda x. \lambda y. (\lambda x. y \lambda y. x)$              | (b) $\lambda x. (x (\lambda y. (\lambda x. x y) x))$   |
| (c) $\lambda a. (\lambda b. a \lambda b. (\lambda a. a b))$          | (d) $(\lambda \text{free.} \text{bound} \lambda \text{bound.} (\lambda \text{free.} \text{free bound}))$ |
| (e) $(\lambda x. x y) (\lambda y. y)$                                | (f) $(\lambda x. (x y)) (\lambda y. y)$  |
| (g) $\lambda x. \lambda y. \lambda z. (\lambda z. (z \lambda x. y))$ | (h) $(\lambda x. \lambda y. (x z (y z))) (\lambda x. (y \lambda y. y))$                                  |

## V Capture de variable

Pour chacun des redex suivants, indiquer si le problème de capture de variable se pose. Si oui, appliquer la  $\alpha$ -conversion nécessaire.

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\lambda x. (x \lambda y. y) \lambda x. \lambda y. x$             | (b) $\lambda x. (\lambda x. x \lambda y. x) \lambda y. x$           |
| (c) $\lambda x. \lambda y. (x y) \lambda x. y$                        | (d) $\lambda x. \lambda y. (y x) \lambda y. x$                      |
| (e) $\lambda x. \lambda y. (y x) \lambda x. y$                        | (f) $\lambda x. (z x \lambda y. (y z)) \lambda x. (y \lambda y. y)$ |
| (g) $\lambda x. (z \lambda y. (x (y z))) \lambda x. (y \lambda y. y)$ |   |

## VI Ordre de réduction

Pour chacune des  $\lambda$ -expressions :

- |   |  |
|---|--|
| (a) $\lambda x. (\lambda z. z x y) \lambda y. y$                    | (b) $\lambda x. \lambda y. (z (\lambda z. (z \lambda x. y)))$                                |
| (c) $\lambda y. (+ (\lambda x. x y) y) (\lambda y. (* 2 y) 1)$      | (d) $\lambda f. \lambda x. (f x) \lambda x. \lambda a. (x a) \lambda x. x \lambda y. y$      |
| (e) $\lambda x. \lambda y. (x z (y z)) \lambda x. (\lambda y. y y)$ | (f) $\lambda h. (\lambda x. (h (x x))) \lambda x. (h (x x)) \lambda f. \lambda x. x (+ 1 5)$ |

Réduire l'expression sous forme normale en utilisant :

1. La stratégie NOR (ordre normal),
2. La stratégie AOR (ordre applicatif).

(Indiquer le redex en utilisant le symbole  $\lambda$ ).