Département d'Informatique
LICENCE 2ème année
Mardi 10 octobre 2006

Travaux Dirigés de Programmation Fonctionnelle
«Programmer c'est prouver»

I Suite arithmétique

1. *Suite de Fibonacci* : La suite de Fibonacci est définie ainsi :

$$\begin{array}{l} fib(0) = 0, \\ fib(1) = 1, \\ fib(n) = fib(n-1) + fib(n-2), \quad n{>}1 \end{array}$$

   Traduire cette définition récursive en Ocaml.

2. *Triangle de Pascal* : Le triangle de Pascal est ce triangle infini d'entiers naturels réprésenté ci-dessous. Les nombres qui y figurent, appelés les coefficients binomiaux (car ils apparaissent comme coefficients dans une formule célèbre, dite du binôme de Newton), jouent un rôle important dans diverses branches des mathématiques. Ces nombres satisfont à une loi simple : chaque nombre est la somme des deux nombres voisins placés au dessus de lui. En déduire la définition récursive d'une fonction qui retourne le nombre situé à une position donnée dans le triangle.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & \ldots & & & & & & & & & & & & \ldots & & 1
\end{array}$$

II Divisibilité

1. *Plus grand commun diviseur (algorithme d'Euclide)* : D'après Euclide, si a et b sont des entiers vérifiant $a > b > 0$ et r est le reste de la division euclidienne de a par b, alors $pgcd(a, b) = pgcd(b, r)$. Utiliser cette équation pour inventer une définition récursive du pgcd de 2 nombres entiers relatifs.

2. *Nombres premiers* : Un nombre entier naturel p est premier si et seulement si l'ensemble de ses diviseurs est $\{1, p\}$ et p est non nul et différent de 1. Ecrire une fonction récursive qui, étant donnés un entier naturel n et un autre entier naturel $d < n$ détermine s'il existe un diviseur de n dans l'ensemble $\{1, .., d\}$. En déduire une fonction qui teste si un entier naturel est premier.

III Séries entières

1. *Elévation à la puissance* : On cherche à calculer x^n avec x, un réel et n, un entier naturel. Écrire une première définition récursive en utilisant l'équation $x^n = x^{n-1} \times x$ pour $n > 0$. Écrire une deuxième version en utilisant l'équation $x^n = x^{n/2} \times x^{n/2}$ si n pair.
2. *Opérateur* Σ : Définir une fonction d'ordre supérieur qui, étant donné $p \in N$, calcule la somme des $p+1$ premiers termes d'une suite $(u_n), n \in N$:

$$\sum_{k=0}^{p} u_k$$

IV Intégration et dérivation de fonctions

1. *Integrale* : Définir une fonctionnelle qui calcule l'intégrale d'une fonction f intégrable sur un intervalle $[a, b]$. Utiliser la valeur approchée donnée par la formule de Simpson :

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)), \text{ avec } h = \frac{b-a}{6}$$

2. *Dérivée* : Définir une fonctionnelle qui calcule la dérivée d'une fonction dérivable f. Utiliser la définition suivante :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$