

Travaux Dirigés de Programmation Fonctionnelle

«λ-calcul»

I Syntaxe

Pour chacune des λ-expressions :

- | | |
|---------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| (a) $\lambda x.(\lambda y.(+ x 3))$ | (b) $\lambda p.(\lambda q.p \lambda x.(x p)) \lambda i.\lambda j.(j i)$ |
| (c) $\lambda x.\lambda y.\lambda z.((+ 3 x) y) z) 5 \pi$ | (d) $\lambda x.\lambda y.\lambda z.((z x) (z y))$ |
| (e) $\lambda x.(x 3)$ | (f) $\lambda a.(a \lambda b.(b a))$ |
| (g) $\lambda f.\lambda g.(\lambda h.(g h) f) \lambda p.\lambda q.p$ | (h) $\lambda e.\lambda i.\lambda o.\lambda u.(u (o (i e)))$ |

- Déterminer s'il s'agit d'une constante, d'une variable, d'une abstraction ou d'une application, et faire de même pour toutes les sous-expressions.
- Oter les parenthèses inutiles.
- Parenthésier complètement.

II Signification

Pour chacune des abstractions suivantes, indiquer si elle peut être interprétée comme une fonction anonyme. Si oui, laquelle ?

- | | |
|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| (a) $\lambda x.(\lambda y.(+ x 3))$ | (b) $\lambda f.(* (+ 3 2) 5)$ |
| (c) $\lambda x.(x 3)$ | (d) $\lambda x.(x x)$ |
| (e) $\lambda x.(3 x)$ | (f) $\lambda e.\lambda i.\lambda o.\lambda u.(u (o (i e)))$ |
| (g) $\lambda x.\lambda y.\lambda z.((z x) (z y))$ | (h) $\lambda a.(a \lambda b.(b a))$ |

III Réduction

Réduire les λ-expressions suivantes en utilisant la β-conversion. Indiquer le redex avec le symbole λ . (Ces expressions sont telles que le problème de capture de variable ne se pose pas) :

- | | |
|---------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| (a) $\lambda a.\lambda b.(+ a b) 5$ | (b) $\lambda x.(+ x x) (\lambda y.y z)$ |
| (c) $\lambda c.\lambda v.\lambda f.((c v) f) \lambda x.\lambda y.x$ | (d) $(\lambda x.\lambda y.(y x) \lambda p.\lambda q.p) \lambda i.i$ |

- (e) $((\lambda x.\lambda y.\lambda z.((x y) z) \lambda f.\lambda a.(f a)) \lambda i.i) \lambda j.j$
(f) $\lambda h.((\lambda a.\lambda f.(f a) h) h) \lambda g.(g g)$
(g) $(\lambda p.\lambda q.(p q) (\lambda x.x \lambda a.\lambda b.a)) \lambda k.k$
(h) $\lambda n.\lambda f.\lambda x.(f (n f x)) \lambda f.\lambda x.(f x)$

IV Variables libres et liées

Pour chacune des λ -expressions suivantes et pour chaque occurrence de variable, indiquer si la variable est libre ou liée.

- (a) $\lambda x.\lambda y.(\lambda x.y \lambda y.x)$ (b) $\lambda x.(x (\lambda y.(\lambda x.x y) x))$
(c) $\lambda a.(\lambda b.a \lambda b.(\lambda a.a b))$ (d) $(\lambda free.bound \lambda bound.(\lambda free.free bound))$
(e) $(\lambda x.x y) (\lambda y.y)$ (f) $(\lambda x.(x y)) (\lambda y.y)$
(g) $\lambda x.\lambda y.\lambda z.(\lambda z.(z \lambda x.y))$ (h) $(\lambda x.\lambda y.(x z (y z))) (\lambda x.(y \lambda y.y))$

V Capture de variable

Pour chacun des redex suivants, indiquer si le problème de capture de variable se pose. Si oui, appliquer la α -conversion nécessaire.

- (a) $\lambda x.(x \lambda y.y) \lambda x.\lambda y.x$ (b) $\lambda x.(\lambda x.x \lambda y.x) \lambda y.x$
(c) $\lambda x.\lambda y.(x y) \lambda x.y$ (d) $\lambda x.\lambda y.(y x) \lambda y.x$
(e) $\lambda x.\lambda y.(y x) \lambda x.y$ (f) $\lambda x.(z x \lambda y.(y z)) \lambda x.(y \lambda y.y)$
(g) $\lambda x.(z \lambda y.(x (y z))) \lambda x.(y \lambda y.y)$

VI Ordre de réduction

Pour chacune des λ -expressions :

- (a) $\lambda x.(\lambda z.z x y) \lambda y.y$ (b) $\lambda x.\lambda y.(z (\lambda z.(z \lambda x.y)))$
(c) $\lambda y.(+ (\lambda x.x y) y) (\lambda y.(* 2 y) 1)$ (d) $\lambda f.\lambda x.(f x) \lambda x.\lambda a.(x a) \lambda x.x \lambda y.y$
(e) $\lambda x.\lambda y.(x z (y z)) \lambda x.(\lambda y.y y)$ (f) $\lambda h.(\lambda x.(h (x x)) \lambda x.(h (x x))) \lambda f.\lambda x.x (+ 1 5)$

Réduire l'expression sous forme normale en utilisant :

1. La stratégie NOR (ordre normal),
2. La stratégie AOR (ordre applicatif).

(Indiquer le redex en utilisant le symbole λ).