

La Projection Entière de Polytopes Paramétrés

Rachid Seghir

ICPS-LSIIT Pôle API
Boulevard Sébastien Brant
F-67400 ILLKIRCH-France
seghir@icps.u-strasbg.fr

Résumé

Le modèle polyédrique est une approche très utile pour l'analyse et la transformation de nids de boucles à bornes affines. Nous présentons dans ce travail une méthode qui s'intéresse à l'une des opérations géométriques les plus délicates soulevées par ce modèle. Il s'agit de la projection des points à coordonnées entières de polytopes paramétrés. Notre méthode est basée sur le travail de W. Pugh dont l'idée de base est l'extension de l'élimination de variables de Fourier-Motzkin pour les entiers.

Mots-clés : modèle polyédrique, polytopes paramétrés, transformations de points entiers, polynômes d'Ehrhart, formules de Presburger.

1. Introduction

Plusieurs techniques d'optimisation de programmes, en particulier celles basées sur l'analyse et la transformation de nids de boucles à bornes affines, soulèvent le problème de l'énumération de points à coordonnées entières dans des *polytopes* (polyèdres bornés) *paramétrés* et dans des opérations géométriques sur ces polytopes. Plus généralement, de nombreux domaines font appel à la résolution de problèmes en nombres entiers [4, 7, 2, 10, 3, 18, 8]. La projection entière d'un polytope, ou l'image des points entiers d'un polytope par une transformation affine est une opération qui a motivé un grand nombre de recherches. Plusieurs approches ont été proposées [1, 15, 13, 12, 19, 17], mais aucune d'entre elles n'a pu résoudre définitivement ce problème, en particulier, lorsqu'il s'agit de polytopes *paramétrés*.

W. Pugh et al. [14, 15, 16] ont proposé un algorithme basé sur l'élimination de variable de Fourier-Motzkin. Leur solution est surtout destinée à décider si une formule de Presburger est valide. Dans certains cas, cette solution élimine des variables existentielles en introduisant d'autres variables qui rendent facile la décision de l'existence d'une solution. L'introduction de nouvelles contraintes comportant des variables existentielles n'est pas adaptée au problème de l'énumération de points entiers dans la projection d'un polytope à travers plusieurs dimensions.

Dans ce travail nous proposons une adaptation de la méthode de W. Pugh et D. Wonnacott [16] pour calculer explicitement les formules des *trous*, i.e, des points entiers de l'enveloppe convexe de la projection qui ne possèdent pas d'antécédents entiers. En excluant ces points à chaque élimination d'une variable existentielle, nous obtenons les points appartenant à la projection entière. Ces derniers sont finalement donnés sous forme d'une union de polytopes ou de \mathbb{Z} -polytopes. Dans le reste de cet article, nous désignerons par \mathbb{Z} -polytope l'intersection d'un polytope avec un lattice (réseau régulier de points entiers) non standard.

Nous commencerons par montrer à travers un exemple la motivation de ce travail. Nous présenterons ensuite notre méthode de calcul de trous dans la troisième section. Dans la quatrième section nous traiterons le problème de l'énumération de points entiers dans les projections récursives d'un polytope paramétré, avant de conclure.

2. Motivation

Considérons le nid de boucles suivant :

```
for (i=1; i<=p+4; i++)
  for (j=1; j<=5; j++)
    for (k=1; 3*k<=2*p; k++)
      A(3*i+4*j+6*k+1)= .....
    end;
  end;
end;
```

Ce nid de boucles définit un domaine d'itération correspondant au polytope paramétré $\{(i, j, k) \in \mathbb{Z}^3 \mid 1 \leq i \leq p+4 \wedge 1 \leq j \leq 5 \wedge 3 \leq 3k \leq 2p\}$ et une fonction (affine) d'accès aux éléments du tableau A , $T(i, j, k) = 3i + 4j + 6k + 1$. Les éléments du tableau A accédés par ce nid de boucles sont alors donnés par l'image des points entiers du polytope P par la transformation T . Les points entiers de l'image de P qui n'ont pas d'antécédents entiers dans P , ne sont pas accédés par ce nid de boucles. On appelle ces points, les *trous*.

Il est bien connu [15] que l'image de points entiers de P par T est équivalent à la formule de Presburger suivante :

$$P = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists (i, j, k) \in \mathbb{Z}^3 : 1 \leq i \leq p+4 \wedge 1 \leq j \leq 5 \wedge 3 \leq 3k \leq 2p \wedge x = 3i + 4j + 6k + 1\}.$$

Le problème de calcul de l'image entière se réduit ainsi à l'élimination des variables existentielles i, j et k . Nous montrerons un peu plus loin, que les éventuels trous générés par l'élimination d'une variable existentielle sont portés par une union de \mathbb{Z} -hyperplans, calculés à partir des bornes inférieures et supérieures sur la variable à éliminer. Nous montrerons également comment on utilise cette information pour éliminer une deuxième variable existentielle et ainsi de suite.

La projection du polytope P sur x sans prendre en considération le problème de trous, ou autrement dit, l'application directe de l'élimination de variables de Fourier-Motzkin donne le résultat suivant :

$$T(P) = \{x \in \mathbb{Z} \mid 14 \leq x \leq 7p + 33\} \text{ avec } p \geq 2.$$

Le nombre de points entiers de ce polytope est donné par le polynôme d'Ehrhart[6, 5, 20] suivant :

$$\mathcal{E}(T(P)) = 7p + 20 \text{ si } p \geq 2 \text{ et } 0 \text{ sinon.} \quad (1)$$

Tandis que le nombre *exact* des images de points entiers de P est donné par notre méthode sous la forme :

$$\mathcal{E}(T(P)) = 7p + [14, 10, 12]_p \text{ si } p \geq 2 \text{ et } 0 \text{ sinon,} \quad (2)$$

où $N(p) = [n_0, n_1, \dots, n_{q-1}]_p$ est un *nombre périodique* de période q . I.e, $N(p) = n_i$ si $p \bmod q = i$, avec $0 \leq i \leq q - 1$.

L'évaluation du polynôme (1) lorsque $p = 4$ dit que l'image de P comporte 48 points entiers. Tandis que le polynôme (2) compte seulement 38 points. Donc pour $p = 4$ le nombre de trous générés par la projection entière de P est égal à 10, soit environ 20 % des points entiers de l'enveloppe convexe de $T(P)$.

3. Élimination des variables existentielles et projection entière

La procédure d'élimination de variable de Fourier-Motzkin permet d'éliminer une variable existentielle d'un système linéaire défini sur l'ensemble des réels. Son idée consiste à récrire le système sous forme d'un ensemble de bornes inférieures et supérieures sur la variable à éliminer. Ensuite, toute paire de bornes de la forme : $\{l(\mathbf{x}) \leq \beta z, \alpha z \leq u(\mathbf{x})\}$ (resp. $\{l(\mathbf{x}) \leq \beta z, \alpha z < u(\mathbf{x})\}$, $\{l(\mathbf{x}) < \beta z, \alpha z \leq u(\mathbf{x})\}$, $\{l(\mathbf{x}) < \beta z, \alpha z < u(\mathbf{x})\}$) est à remplacer par $\alpha l(\mathbf{x}) \leq \beta u(\mathbf{x})$ (resp. $\alpha l(\mathbf{x}) < \beta u(\mathbf{x})$, $\alpha l(\mathbf{x}) < \beta u(\mathbf{x})$, $\alpha l(\mathbf{x}) < \beta u(\mathbf{x})$), où z est la variable existentielle à éliminer, $l(\mathbf{x})$ et $u(\mathbf{x})$ des fonctions affines d'un vecteur de variables \mathbf{x} indépendantes de z , et α et β des constantes entières strictement positives.

Dans le reste de cet article, nous considérons seulement les paires de la forme : $\{l(\mathbf{x}) \leq \beta z, \alpha z \leq u(\mathbf{x})\}$, puisque tout système définissant un polytope (objet de notre étude) peut être récrit sous cette forme.

3.1. Élimination de Fourier-Motzkin sur les entiers

L'élimination de variable de Fourier-Motzkin décrite ci-dessus a été étendue pour les entiers par W. Pugh et al. [14, 15, 16] comme suit :

Toute paire de bornes, inférieure et supérieure, $\{l(\mathbf{x}) \leq \beta z, \alpha z \leq u(\mathbf{x})\}$ définit :

- une **ombre exacte**, correspondant à la projection *rationnelle* des points appartenant à cette paire de contraintes. Ceci est donné par : $\alpha l(\mathbf{x}) \leq \beta u(\mathbf{x})$.
- une **ombre noire**, correspondant à la partie de l'ombre exacte dont tout point entier possède au moins un antécédent entier. Ceci est donné par : $\alpha l(\mathbf{x}) + (\alpha - 1)(\beta - 1) \leq \beta u(\mathbf{x})$. Remarquez que si $\alpha = 1$ ou $\beta = 1$, l'ombre noire est égale à l'ombre exacte.

La partie de l'ombre exacte n'appartenant pas à l'ombre noire, comporte généralement des points entiers qui possèdent des antécédents entiers, et d'autres qui ne possèdent que des antécédents rationnels, i.e, des *trous* (voir FIG. 1). L'objectif de Omega test [14] était juste de répondre à la question : existe-t-il un point entier dans la projection du polytope dont l'antécédent est entier ? Pour répondre à cette question, Omega test procède comme suit :

- si l'ombre exacte ne comporte aucun point entier, la réponse est : *non*,
- si l'ombre noire comporte un point entier, la réponse est : *oui*,
- sinon la réponse devient non évidente. Dans ce cas, il faudra savoir si la partie de l'ombre exacte n'appartenant pas à l'ombre noire comporte ou non, un point dont l'antécédent est entier.

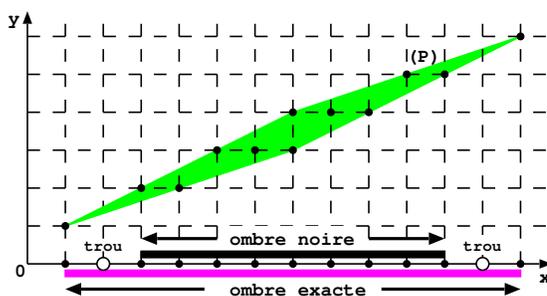


FIG. 1 – Projection des points à coordonnées entières d'un polytope.

Pour répondre à cette dernière question, W. Pugh et D. Wonnacott [16] vérifient si l'intersection d'un certain nombre (fonction de α et β) d'hyperplans avec les contraintes du système original comporte ou non un point entier. Cette solution entraîne l'introduction de nouvelles variables existentielles. Ce qui complique la réponse aux deux questions suivantes :

- *combien* de points entiers existent-ils dans la projection du polytope ?
- *comment* projeter successivement à travers plusieurs variables ?

Exemple 1 Pour illustrer l'avantage de notre méthode par rapport à celle de Omega, nous considérons l'exemple (introduit dans [16]) suivant :

$$P = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z} : 0 \leq 3y - x \leq 7 \wedge 1 \leq x - 2y \leq 5\}.$$

L'ombre exacte définie par l'élimination de y est donnée par : $3 \leq x \leq 29$ et l'ombre noire est donnée par : $5 \leq x \leq 27$. L'algorithme de W. Pugh et D. Wonnacott [16] calcule un ensemble de contraintes qui contiennent les images n'appartenant pas à l'ombre noire comme suit :

$$\begin{aligned} & \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z} : x = 3y \wedge 1 \leq y \leq 5\} \cup \\ & \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z} : x = 3y - 1 \wedge 2 \leq y \leq 6\} \cup \\ & \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z} : x = 2y + 5 \wedge 5 \leq y \leq 12\}. \end{aligned}$$

Alors que notre méthode donne ces images directement sous la forme : $x = 3$ et $x = 29$.

Nous montrerons dans ce qui suit que notre méthode permet de manipuler une classe plus large de projections. En particulier, la projection *exacte* à travers *plusieurs* variables de polytopes *paramétrés*.

3.2. Équations des hyperplans de trous

Comme nous l'avons déjà mentionné dans la section 2, le problème de calcul de la transformation affine d'un polytope paramétré est équivalent à l'élimination des variables existentielles de la formule de Presburger qui définit la transformation. La première étape consiste à supprimer toutes les équations de la formule. Ceci entraîne l'élimination d'un certain nombre de variables existentielles (égal au nombre d'équations). La suppression d'une équation d'un polytope défini sur l'ensemble des entiers, doit se faire de façon à ce qu'il existe une valeur entière de la variable à éliminer pour toute valeur entière des autres variables. Une étape dite *compression de variables* est aussi intéressante pour éliminer les trous qui apparaissent avec un pas régulier lors de la suppression d'une équation. Ces techniques sont décrites en détail dans [12]. Nous considérons sans perte de généralité, que notre formule ne comporte désormais que des inéquations et nous nous focaliserons seulement sur l'élimination des variables existentielles qui persistent après la suppression des équations.

Nous pouvons ainsi récrire la formule sous forme d'un ensemble de bornes inférieures et supérieures ($l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq \beta i$, $\alpha i \leq u(\mathbf{x}, \mathbf{p})$), où i est la variable à éliminer, $l(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ et $u(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ des fonctions affines, des variables (vecteur \mathbf{x}) et des paramètres (vecteur \mathbf{p}), indépendantes de i , et α et β des constantes entières strictement positives.

Lemme 1 Soient x, y deux nombres rationnels et $\lceil x \rceil, \lceil y \rceil$ (resp. $\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor$) leurs parties entières supérieures (resp. inférieures). Par définition, les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $\exists n \in \mathbb{Z}$ tel que $x \leq n \leq y$,
2. $\lceil x \rceil \leq y$,
3. $\lfloor y \rfloor \geq x$.

Proposition 1 Soit $\{l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq \beta i, \alpha i \leq u(\mathbf{x}, \mathbf{p})\}$ une paire de bornes, inférieure et supérieure, sur la variable i à éliminer ; $l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = l_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + c_l$, $u(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = l_u(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + c_u$, où $l_i(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ et $l_u(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ sont des fonctions linéaires des variables et des paramètres, c_l et c_u sont des constantes entières ; g est le plus grand commun diviseur (pgcd) des coefficients des variables et des paramètres dans la fonction linéaire donnée par $\alpha l_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \beta l_u(\mathbf{x}, \mathbf{p})$. Alors :

– Les trous (s'ils existent) générés par l'élimination de i selon cette paire de bornes sont portés par les hyperplans :

$$\alpha l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \beta u(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + \gamma = 0, \quad (3)$$

avec $\gamma \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \gamma \leq \alpha\beta - \alpha - \beta$ et $g \mid (\beta c_u - \alpha c_l - \gamma)$, où $x \mid y$ signifie x divise y .

– Les valeurs de γ pour lesquelles l'hyperplan (3) porte des trous sont celles qui vérifient l'inéquation suivante :

$$\alpha(-l(\mathbf{x}, \mathbf{p})) \bmod \beta > \gamma, \quad (4)$$

ou de manière équivalente :

$$\beta(u(\mathbf{x}, \mathbf{p})) \bmod \alpha > \gamma. \quad (5)$$

Preuve

Rappelons que l'ombre exacte et l'ombre noire sont données respectivement par $\alpha l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \beta u(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq 0$ et $\alpha l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \beta u(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq -(\alpha - 1)(\beta - 1)$ [16]. Par définition, si un trou existe, il doit se situer dans la partie de l'ombre exacte n'appartenant pas à l'ombre noire (voir FIG. 1). Cette partie est donnée par : $-(\alpha\beta - \alpha - \beta) \leq \alpha l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \beta u(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq 0$. Ceci est équivalent à : $\alpha l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \beta u(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + \gamma = 0$, où γ est un entier compris entre 0 et $\alpha\beta - \alpha - \beta$.

Posons $l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = l_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + c_l$ et $u(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = l_u(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + c_u$, où $l_i(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ et $l_u(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ sont des fonctions linéaires des variables et des paramètres, c_l et c_u sont des constantes entières. En reportant par les valeurs de $l(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ et $u(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ dans (3) on obtient : $\alpha l_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \beta l_u(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \beta c_u - \alpha c_l - \gamma$, où $(\alpha l_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \beta l_u(\mathbf{x}, \mathbf{p}))$ est une fonction linéaire et $(\beta c_u - \alpha c_l - \gamma)$ est une constante entière. Une condition nécessaire et suffisante pour que cet hyperplan passe par un point entier est que le pgcd des coefficients dans la fonction linéaire $(\alpha l_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \beta l_u(\mathbf{x}, \mathbf{p}))$ divise la constante $(\beta c_u - \alpha c_l - \gamma)$.

D'autre part, nous avons $\{l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq \beta i, \alpha i \leq u(\mathbf{x}, \mathbf{p})\}$ est équivalent à $\frac{l(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\beta} \leq i \leq \frac{u(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\alpha}$ (puisque $\alpha, \beta > 0$), où $\frac{l(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\beta}$ et $\frac{u(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\alpha}$ sont des fonctions rationnelles. D'après les propriétés (1) et (2) du lemme 1, il existe un entier i entre $\frac{l(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\beta}$ et $\frac{u(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\alpha}$ si et seulement si $\left\lceil \frac{l(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\beta} \right\rceil \leq \frac{u(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\alpha}$. La négation de cette proposition correspond à la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de trous. Autrement dit, il n'existe pas d'entier i entre $\frac{l(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\beta}$ et $\frac{u(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\alpha}$ si et seulement si :

$$\left\lceil \frac{l(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\beta} \right\rceil > \frac{u(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\alpha}, \quad (6)$$

avec $\left\lceil \frac{l(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\beta} \right\rceil = \frac{1}{\beta}(l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + (-l(\mathbf{x}, \mathbf{p})) \bmod \beta)$ [11]. Après simplification de (6) on obtient : $\alpha(-l(\mathbf{x}, \mathbf{p})) \bmod \beta > \beta u(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \alpha l(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, avec $\beta u(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \alpha l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \gamma$ d'après l'équation (3). Ainsi l'inéquation (4) est vérifiée. En appliquant le lemme 1, on peut également prouver l'inéquation (5).

Note 1 Notez que si une des bornes $l(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ ou $u(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ est indépendante des variables et des paramètres, l'élimination de la variable existentielle résulterait en seulement l'ombre exacte ou l'ombre noire. Car dans ce cas, $\left\lceil \frac{l(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\beta} \right\rceil$ ou $\left\lfloor \frac{u(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\alpha} \right\rfloor$ sera remplacé par simplement une constante.

3.3. Calcul effectif des hyperplans de trous

Soit $\{l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq \beta i, \alpha i \leq u(\mathbf{x}, \mathbf{p})\}$ une paire de bornes, inférieure et supérieure, sur la variable i à éliminer. Selon les valeurs des constantes α et β , le calcul des hyperplans sur lesquels se situent les trous (selon cette paire de bornes) peut se faire de deux façons différentes.

3.3.1. Cas où α et β sont premiers entre eux

Proposition 2 Si α et β sont premiers entre eux, le calcul des valeurs de γ pour lesquelles l'hyperplan (3) porte des trous, ne dépend que des constantes α et β (i.e, il est indépendant des variables et des paramètres). Dans ce cas, les inéquations (4) et (5) sont respectivement équivalentes à :

$$\alpha(c_1\gamma) \bmod \beta > \gamma, \quad (7)$$

$$\beta(c_2\gamma) \bmod \alpha > \gamma, \quad (8)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes entières tel que $c_1\alpha + c_2\beta = 1$.

Preuve

Si α et β sont premiers entre eux, alors d'après le théorème dit *Identité de Bezout*, il existe deux constantes entières c_1 et c_2 tel que :

$$c_1\alpha + c_2\beta = 1. \quad (9)$$

En multipliant l'équation (3) par c_1 , on obtient :

$$c_1\alpha l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - c_1\beta u(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + c_1\gamma = 0 \Rightarrow (1 - c_2\beta)l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - c_1\beta u(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + c_1\gamma = 0 \text{ (d'après (9))}. \text{ Donc}$$

$$l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \beta(c_2l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + c_1u(\mathbf{x}, \mathbf{p})) - c_1\gamma.$$

En reportant par la valeur de $l(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ dans l'inéquation (4), on obtient :

$$\alpha(-\beta(c_2l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + c_1u(\mathbf{x}, \mathbf{p})) + c_1\gamma) \bmod \beta > \gamma \equiv \alpha(c_1\gamma) \bmod \beta > \gamma,$$

car $-\beta(c_2l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + c_1u(\mathbf{x}, \mathbf{p}))$ est un multiple de β . En procédant d'une façon similaire sur l'inéquation (5), on obtient (8).

Exemple 2 Considérons un polytope P (FIG. 1) défini par :

$$P = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z} : 2 \leq 3y - x \leq 5 \wedge -1 \leq x - 2y \leq 1\}$$

Choisissons une paire de bornes sur y : $\{x + 2 \leq 3y, 2y \leq x + 1\}$. Nous avons :

$$l(x) = x + 2, u(x) = x + 1, \alpha = 2, \beta = 3 \Rightarrow c_1 = -1, c_2 = 1.$$

L'ombre exacte est $x \geq 1$ et l'ombre noire est $x \geq 3$. Les trous générés par cette paire de bornes sont donnés par :

$$\begin{aligned}\alpha l(x) - \beta u(x) + \gamma &= 0, \quad 0 \leq \gamma \leq \alpha\beta - \alpha - \beta \text{ et } \alpha(c_1\gamma) \bmod \beta > \gamma \\ \Rightarrow -x + 1 + \gamma &= 0, \quad 0 \leq \gamma \leq 1 \text{ et } 2(-\gamma) \bmod 3 > \gamma.\end{aligned}$$

La seule valeur de γ satisfaisant ces contraintes est $\gamma = 1$. Le point correspondant (hyperplan dans le cas général) est $x = 2$. Similairement, on peut calculer le trou $x = 12$ correspondant à la deuxième paire de bornes $\{x - 1 \leq 2y, 3y \leq x + 5\}$ dont l'ombre exacte est $x \leq 13$ et l'ombre noire est $x \leq 11$.

La projection entière du polytope P peut alors être obtenue en excluant les trous de l'ombre exacte. Ce qui donne : $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 1 \vee 3 \leq x \leq 11 \vee x = 13\}$.

3.3.2. Cas où α et β ne sont pas premiers entre eux

Dans ce cas le calcul des valeurs de γ pour lesquelles l'hyperplan (3) porte des trous, dépend évidemment des constantes α et β , mais aussi des variables et des paramètres. Posons $g' = \text{pgcd}(\alpha, \beta)$, $\alpha' = \alpha/g'$, $\beta' = \beta/g'$ et g le pgcd des coefficients des variables et des paramètres dans la fonction linéaire $\alpha'l_l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \beta'l_u(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, avec $l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = l_l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + c_l$ et $u(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = l_u(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + c_u$ (voir la proposition 1). On peut ainsi récrire l'équation de l'hyperplan (3) comme suit :

$$\alpha'l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \beta'u(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + \gamma = 0, \quad (10)$$

avec $\gamma \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \gamma \leq \alpha\beta' - \alpha' - \beta'$ et $g|(\beta'c_u - \alpha'c_l - \gamma)$.

Les inéquations (4) et (5) sont aussi à récrire respectivement sous la forme (11) et (12).

$$\alpha'(-l(\mathbf{x}, \mathbf{p})) \bmod \beta > \gamma, \quad (11)$$

$$\beta'(u(\mathbf{x}, \mathbf{p})) \bmod \alpha > \gamma. \quad (12)$$

Dans ce cas, les valeurs de γ pour lesquelles l'hyperplan (10) porte des trous sont calculées comme suit : Nous remplaçons l'expression $\alpha'(-l(\mathbf{x}, \mathbf{p})) \bmod \beta$ de l'inéquation (11) (ou $\beta'(u(\mathbf{x}, \mathbf{p})) \bmod \alpha$ de l'inéquation (12)) par le nombre périodique qui lui est équivalent. Ce dernier est donné par un tableau A de dimension k inférieur ou égal au nombre de variables et de paramètres qui apparaissent dans $l(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ (ou $u(\mathbf{x}, \mathbf{p})$), et de pseudo-période n_1, \dots, n_k [11]. Chaque élément $A[m_1, \dots, m_k]$ dont la valeur est supérieure strictement à la valeur courante de γ (disons γ_j), définit un lattice dont l'intersection avec l'hyperplan $\alpha'l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \beta'u(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + \gamma_j = 0$ correspond à des trous. Chaque lattice est défini sous la forme :

$$\mathcal{L}(i_1, i_2, \dots, i_k) = \begin{cases} i_1 \bmod n_1 = m_1 \equiv i_1 = n_1 i'_1 + m_1 \\ i_2 \bmod n_2 = m_2 \equiv i_2 = n_2 i'_2 + m_2 \\ \vdots \\ i_k \bmod n_k = m_k \equiv i_k = n_k i'_k + m_k \end{cases} \quad (13)$$

L'intersection de certains de ces lattices avec l'hyperplan ci-dessus peut être vide. Il convient donc de ne pas les considérer dans le reste de l'algorithme. Nous appelons \mathbb{Z} -hyperplan, l'intersection du lattice $\mathcal{L}(i_1, i_2, \dots, i_k)$ avec un hyperplan de la forme $a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots + a_k i_k + c = 0$. Un \mathbb{Z} -hyperplan ainsi défini, porte des points entiers si et seulement si :

$$\text{pgcd}(a_1 n_1, a_2 n_2, \dots, a_k n_k) | (a_1 m_1 + a_2 m_2 \dots a_k m_k + c).$$

Exemple 3 Dans cet exemple, nous considérons un polytope P (FIG. 2) dont les coefficients de la variable existentielle ne sont pas premiers entre eux.

$$P = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z} : 0 \leq 4y - x \leq 5 \wedge 1 \leq x - 2y \leq 3\}.$$

L'élimination de y de la paire de bornes $\{x \leq 4y, 2y \leq x - 1\}$, se fait comme suit :

$$l(x) = x, \quad u(x) = x - 1, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 4 \Rightarrow \text{pgcd}(\alpha, \beta) = 2, \quad \alpha' = 1, \quad \beta' = 2.$$

L'ombre exacte est $x \geq 2$ et l'ombre noire est $2x \geq 7 \equiv x \geq 4$. Les trous générés par cette paire de bornes sont donnés par :

$$\alpha' l(x) - \beta' u(x) + \gamma = 0, \quad 0 \leq \gamma \leq \alpha\beta' - \alpha' - \beta' \text{ et } \alpha'(-l(x)) \bmod \beta > \gamma$$

$$\Rightarrow -x + 2 + \gamma = 0, \quad 0 \leq \gamma \leq 1 \text{ et } (-x) \bmod 4 > \gamma \equiv [0, 3, 2, 1]_x > \gamma,$$

où $[0, 3, 2, 1]_x$ est un nombre périodique de période 4. Remarquez qu'on aurait pu obtenir un nombre de période 2 au lieu de 4, si on avait appliqué l'inéquation (12) à la place de l'inéquation (11).

Pour $\gamma = 0$, nous avons $[0, 3, 2, 1]_x > 0$ si $\{x \bmod 4 = 1 \vee x \bmod 4 = 2 \vee x \bmod 4 = 3\}$. Le point (hyperplan dans le cas général) correspondant à $\gamma = 0$ est $x = 2$. L'intersection de $x = 2$ avec l'union des trois lattices ci-dessus n'est pas vide. Donc $x = 2$ correspond à un trou.

Pour $\gamma = 1$, nous avons $[0, 3, 2, 1]_x > 1$ si $(x \bmod 4 = 1 \vee x \bmod 4 = 2)$. Le point correspondant à $\gamma = 1$ est $x = 3$. L'intersection de $x = 3$ avec l'union des deux lattices ci-dessus est vide. Donc $x = 3$ n'est pas un trou.

Pour la deuxième paire de bornes $\{x - 3 \leq 2y, 4y \leq x + 5\}$, on a :

$$l(x) = x - 3, \quad u(x) = x + 5, \quad \alpha = 4, \quad \beta = 2 \Rightarrow \text{pgcd}(\alpha, \beta) = 2, \quad \alpha' = 2, \quad \beta' = 1.$$

L'ombre exacte et l'ombre noire sont données respectivement par : $x \leq 11$ et $2x \leq 19 \equiv x \leq 9$. Les trous générés par cette paire de bornes sont donnés par :

$$x - 11 + \gamma = 0, \quad 0 \leq \gamma \leq 1 \text{ et } 2(-x + 3) \bmod 2 > \gamma \equiv [2, 0]_x > \gamma.$$

Lorsque $\gamma = 0$, $[2, 0]_x > 0$, si $x \bmod 2 = 0$, le point correspondant à $\gamma = 0$ est $x = 11$. $\{x = 11 \cap (x \bmod 2 = 0)\} = \emptyset$, d'où $x = 11$ n'est pas un trou. Pour $\gamma = 1$, $[2, 0]_x > 1$ si $x \bmod 2 = 0$. Le point correspondant ($x = 10$) est un trou, puisque $\{x = 10 \cap (x \bmod 2 = 0)\} \neq \emptyset$.

La projection du polytope P peut être finalement donnée sous la forme : $\{x \in \mathbb{Z} \mid 3 \leq x \leq 9 \vee x = 11\}$.

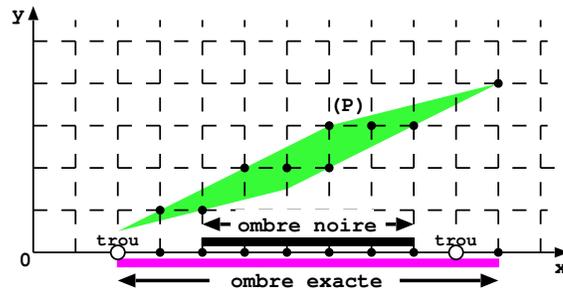


FIG. 2 – Élimination d'une variable existentielle dont les coefficients ne sont pas premiers entre eux.

4. Projection récursive et problème d'énumération

Nous avons montré dans la section précédente, comment sont calculés les hyperplans sur lesquels se situent les trous. Nous nous intéressons maintenant aux points ayant au moins un antécédent entier. Ces points sont portés par l'ombre noire et le complément des \mathbb{Z} -hyperplans définissant les trous.

Considérons de nouveau une paire de bornes, inférieure et supérieure, sur la variable à éliminer $\{l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq \beta i, \alpha i \leq u(\mathbf{x}, \mathbf{p})\}$; $l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = l_l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + c_l$; $u(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = l_u(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + c_u$, où $l_l(\mathbf{x}, \mathbf{p}), l_u(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ des fonctions linéaires et c_l, c_u des constantes entières; g le pgcd des coefficients des variables et des paramètres dans la fonction $\alpha l_l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \beta l_u(\mathbf{x}, \mathbf{p})$.

Les points entiers correspondant à l'élimination de la variable existentielle i selon cette paire de bornes sont portés par :

- $\alpha l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \beta u(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 \leq 0$ (ombre noire),
- $\alpha l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \beta u(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + \gamma = 0 \wedge \alpha(-l(\mathbf{x}, \mathbf{p})) \bmod \beta \leq \gamma$ (\mathbb{Z} -hyperplans),
avec $\gamma \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \gamma \leq \alpha\beta - \alpha - \beta$ et $g | (\beta c_u - \alpha c_l - \gamma)$.

Note 2 L'expression $\alpha(-l(\mathbf{x}, \mathbf{p})) \bmod \beta \leq \gamma$ est équivalente à $\beta(u(\mathbf{x}, \mathbf{p})) \bmod \alpha \leq \gamma$. Si le pgcd de α et β est égal à 1, ces inéquations ne dépendent pas des variables et des paramètres. Elles peuvent être remplacées respectivement par $\alpha(c_1\gamma) \bmod \beta \leq \gamma$ et $\beta(c_2\gamma) \bmod \alpha \leq \gamma$, avec $c_1, c_2 \in \mathbb{Z} \wedge c_1\alpha + c_2\beta = 1$. Sinon nous utilisons les nombres périodiques pour trouver les lattices sur lesquels se situent les points recherchés (comme présenté dans la section 3.3.2).

Après élimination de la variable existentielle, le reste des contraintes (i.e, celles qui ne dépendent pas de la variable éliminée) est à rajouter aux contraintes qui définissent l'ombre noire et les \mathbb{Z} -hyperplans. Le résultat est alors un polytope correspondant à l'ombre noire et un ensemble de \mathbb{Z} -polytopes correspondant aux \mathbb{Z} -hyperplans.

Pour projeter à travers une autre dimension, il suffit d'éliminer la variable correspondante de chacun de ces polytopes. L'élimination de la nouvelle variable du polytope correspondant à l'ombre noire se fait comme décrit la section 3. Tandis que son élimination d'un \mathbb{Z} -polytope, se fait d'une façon un peu différente.

Soit P un \mathbb{Z} -polytope défini par un système de contraintes linéaires $\mathcal{S}(i_1, \dots, i_l, \dots, i_k)$ et un lattice $\mathcal{L}(i_1, \dots, i_l, \dots, i_k)$ de la forme (13). Pour éliminer la variable i_l nous procédons comme suit :

- substituer la variable i_l dans $\mathcal{S}(i_1, \dots, i_l, \dots, i_k)$ par $n_l i' + m_l$,
- éliminer la variable i' du système résultant $\mathcal{S}'(i_1, \dots, i', \dots, i_k)$,
- faire l'intersection du résultat avec le lattice $\mathcal{L}'(i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_k)$.

Le nombre de points entiers dans la projection d'un polytope est donné par le nombre de points dans le polytope correspondant à l'ombre noire plus le nombre de points dans l'union disjointe des \mathbb{Z} -polytopes. Pour énumérer les points entiers dans un \mathbb{Z} -polytope, nous utilisons la technique décrite dans [12]. L'idée est de faire un changement de variables correspondant au lattice qui définit le \mathbb{Z} -polytope, énumérer les points entiers du nouveau polytope et récrire le polynôme d'Ehrhart résultant en fonction des paramètres initiaux.

Exemple 4 Considérons l'exemple paramétré de la section 2 :

$$P = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists(i, j, k) \in \mathbb{Z}^3 : 1 \leq i \leq p+4 \wedge 1 \leq j \leq 5 \wedge 3 \leq 3k \leq 2p \wedge x = 3i + 4j + 6k + 1\}.$$

Une suppression appropriée de l'équation $x = 3i + 4j + 6k + 1$ résulte en :

$$P' = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \exists(i', k) \in \mathbb{Z}^2 : \begin{array}{l} -3x - 2k \leq 4i' \leq -3x - 2k + p + 3 \wedge \\ -2x - 3k - 6 \leq 3i' \leq -2x - 3k - 2 \wedge \\ 3 \leq 3k \leq 2p \end{array} \right\}.$$

Pour éliminer la variable i' , nous procédons sur toute paire (non redondante) de bornes sur i' comme suit :

- calcul de l'ombre noire (région convexe de la projection entière selon i'),
- calcul de l'ensemble des hyperplans (ou \mathbb{Z} -hyperplans) sur lesquels se situent les images entières n'appartenant pas à l'ombre noire et ayant des antécédents entiers,
- intersection du résultat avec les contraintes indépendantes de i' .

Pour la première paire de bornes sur i' , $\{-3x - 2k \leq 4i', 3i' \leq -2x - 3k - 2\}$, l'ombre noire est égale à $6k \leq x - 14$ et l'ensemble des hyperplans est :

$$\begin{cases} x - 6k - 8 = 0 \\ x - 6k - 11 = 0 \\ x - 6k - 12 = 0 \end{cases}$$

Pour la deuxième paire, $\{-2x - 3k - 6 \leq 3i', 4i' \leq -3x - 2k + p + 3\}$, l'ombre noire est égale à $6k \geq x - 3p - 27$ et l'ensemble des hyperplans est :

$$\begin{cases} x - 6k - 3p - 33 = 0 \\ x - 6k - 3p - 30 = 0 \\ x - 6k - 3p - 29 = 0 \end{cases}$$

La projection entière de P' à travers i' , noté $\pi_{i'}(P')$, est alors donnée par une union de polytopes P_1, P_2, \dots, P_7 . Une représentation graphique de $\pi_{i'}(P')$, lorsque $p = 4$, est donnée par la figure FIG. 3.

$$\begin{aligned} \pi_{i'}(P') = & P_1 = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : \begin{array}{l} x - 3p - 27 \leq 6k \leq x - 14 \wedge \\ 3 \leq 3k \leq 2p \end{array} \right\} \cup \\ & P_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : x - 6k - 8 = 0 \wedge 3 \leq 3k \leq 2p\} \cup \\ & P_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : x - 6k - 11 = 0 \wedge 3 \leq 3k \leq 2p\} \cup \\ & P_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : x - 6k - 12 = 0 \wedge 3 \leq 3k \leq 2p\} \cup \\ & P_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : x - 6k - 3p - 33 = 0 \wedge 3 \leq 3k \leq 2p\} \cup \\ & P_6 = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : x - 6k - 3p - 30 = 0 \wedge 3 \leq 3k \leq 2p\} \cup \\ & P_7 = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : x - 6k - 3p - 29 = 0 \wedge 3 \leq 3k \leq 2p\}. \end{aligned}$$

Ensuite nous avons à éliminer la variable k de chacun de ces sept polytopes. Le polytope P_1 correspondant

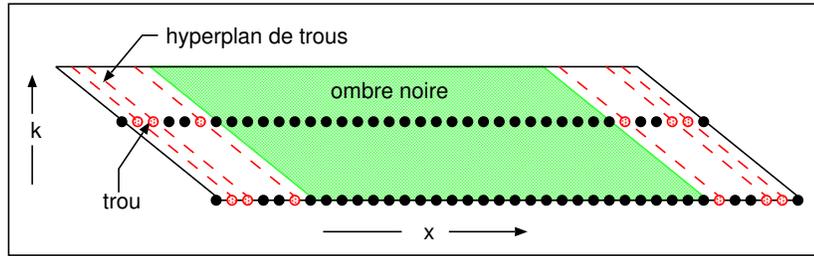


FIG. 3 – Représentation graphique de la projection du polytope P' à travers i' lorsque $p = 4$.

à l'ombre noire est de dimension pleine. Ce qui veut dire que pour en éliminer la variable k , on procède d'une façon similaire à l'élimination de i' du polytope P' . Le résultat, noté $\pi_k(P_1)$ est donné par l'union d'une nouvelle ombre noire $\pi_k(P_1)_1$ et d'un ensemble de \mathbb{Z} -polytopes $\pi_k(P_1)_2, \pi_k(P_1)_3, \pi_k(P_1)_4$ et $\pi_k(P_1)_5$.

$$\begin{aligned} \pi_k(P_1) = & \pi_k(P_1)_1 = \{x \in \mathbb{Z} \mid 20 \leq x \leq 7p + 23 \wedge p \geq 2\} \cup \\ & \pi_k(P_1)_2 = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x = 7p + 27 \wedge p \geq 2 \wedge \left(\begin{array}{l} (x \bmod 6 = 0 \wedge p \bmod 2 = 1) \vee \\ (x \bmod 6 = 3 \wedge p \bmod 2 = 0) \end{array} \right) \right\} \cup \\ & \pi_k(P_1)_3 = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x = 7p + 26 \wedge p \geq 2 \wedge \left(\begin{array}{l} (x \bmod 6 = 2 \wedge p \bmod 2 = 0) \vee \\ (x \bmod 6 = 5 \wedge p \bmod 2 = 1) \end{array} \right) \right\} \cup \\ & \pi_k(P_1)_4 = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x = 7p + 25 \wedge p \geq 2 \wedge \left(\begin{array}{l} (x \bmod 6 = 0 \wedge p \bmod 2 = 1) \vee \\ (x \bmod 6 = 3 \wedge p \bmod 2 = 0) \vee \\ (x \bmod 6 = 1 \wedge p \bmod 2 = 0) \vee \\ (x \bmod 6 = 4 \wedge p \bmod 2 = 1) \end{array} \right) \right\} \cup \\ & \pi_k(P_1)_5 = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x = 7p + 24 \wedge p \geq 2 \wedge \left(\begin{array}{l} (x \bmod 6 = 2 \wedge p \bmod 2 = 0) \vee \\ (x \bmod 6 = 5 \wedge p \bmod 2 = 1) \vee \\ (x \bmod 6 = 0 \wedge p \bmod 2 = 0) \vee \\ (x \bmod 6 = 3 \wedge p \bmod 2 = 1) \end{array} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Notez que ces points sont définis sur un ensemble de lattices, car les coefficients de k (6 et 3) ne sont pas premiers entre eux (voir Section 3.3.2).

L'élimination de la variable k de chacun des polytopes P_2, P_3, \dots, P_7 se fait directement en supprimant

son équation. Ceci résulte en l'ensemble de \mathbb{Z} -Polytopes suivant :

$$\begin{aligned} \pi_k(P_2) &= \{x \in \mathbb{Z} \mid 14 \leq x \leq 4p + 8 \wedge p \geq 2 \wedge (x \bmod 6 = 2)\}, \\ \pi_k(P_3) &= \{x \in \mathbb{Z} \mid 17 \leq x \leq 4p + 11 \wedge p \geq 2 \wedge (x \bmod 6 = 5)\}, \\ \pi_k(P_4) &= \{x \in \mathbb{Z} \mid 18 \leq x \leq 4p + 12 \wedge p \geq 2 \wedge (x \bmod 6 = 0)\}, \\ \pi_k(P_5) &= \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid 3p + 39 \leq x \leq 7p + 33 \wedge p \geq 2 \wedge \left(\begin{array}{l} (x \bmod 6 = 0 \wedge p \bmod 2 = 1) \vee \\ (x \bmod 6 = 3 \wedge p \bmod 2 = 0) \end{array} \right) \right\}, \\ \pi_k(P_6) &= \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid 3p + 36 \leq x \leq 7p + 30 \wedge p \geq 2 \wedge \left(\begin{array}{l} (x \bmod 6 = 0 \wedge p \bmod 2 = 0) \vee \\ (x \bmod 6 = 3 \wedge p \bmod 2 = 1) \end{array} \right) \right\}, \\ \pi_k(P_7) &= \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid 3p + 35 \leq x \leq 7p + 29 \wedge p \geq 2 \wedge \left(\begin{array}{l} (x \bmod 6 = 2 \wedge p \bmod 2 = 1) \vee \\ (x \bmod 6 = 5 \wedge p \bmod 2 = 0) \end{array} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Le résultat de l'élimination successive de i' et k du polytope P' est finalement donné par :

$$\pi_{i'k}(P') = \bigcup_{n=1}^7 \pi_k(P_n).$$

Le nombre de points entiers dans cette union est donné par la somme des nombres de points dans trois ensembles disjoints : $\mathcal{S}_1 = \{(\pi_k(P_1) \cup \pi_k(P_2) \cup \pi_k(P_3)) \setminus \pi_k(P_1)_1\}$, $\mathcal{S}_2 = \pi_k(P_1)_1$ et $\mathcal{S}_3 = \{\pi_k(P_1)_2 \cup \pi_k(P_1)_3 \cup \pi_k(P_1)_4 \cup \pi_k(P_1)_5 \cup (\pi_k(P_5) \cup \pi_k(P_6) \cup \pi_k(P_7)) \setminus \pi_k(P_1)_1\}$. L'ensemble \mathcal{S}_2 correspond à un polytope normal dont le nombre de points est donné, en utilisant l'algorithme décrit dans [20], par : $\mathcal{E}(\mathcal{S}_1) = 7p + 4$ si $p \geq 2$. Tandis que les deux autres ensembles \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_3 correspondent à une union de \mathbb{Z} -polytopes. Pour énumérer les points entiers de ces derniers, nous procédons de la même façon décrite dans [12] et nous obtenons $\mathcal{E}(\mathcal{S}_1) = 3$ si $p \geq 2$ et $\mathcal{E}(\mathcal{S}_3) = [7, 3, 5]_p$ si $p \geq 2$. D'où le nombre de points entiers dans la projection de P' successivement sur i' et k est donné par :

$$\mathcal{E}(\pi_{i'k}(P')) = \begin{cases} 7p + [14, 10, 12]_p & \text{si } p \geq 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. Conclusion

Nous avons présenté dans ce travail une technique basée sur la méthode de W. Pugh et D. Wonnacott [16] qui permet de calculer la projection entière de polytopes paramétrés à travers plusieurs dimensions. L'idée de base est l'élimination de variable de Fourier-Motzkin sur les entiers, procédant sur des paires de bornes, inférieure et supérieure, sur la variable existentielle à éliminer. Nous avons montré que notre méthode dépend en grande partie des coefficients de la variable existentielle dans chaque paire. Si ces coefficients sont premiers entre eux, l'élimination de la variable existentielle résulterait en un nombre relativement petit de \mathbb{Z} -polytopes. Par contre si ces coefficients ne sont pas premiers entre eux, le résultat pourrait être donné par un ensemble de \mathbb{Z} -polytopes définis sur un grand nombre de lattices, ce qui peut peser sur l'efficacité de la méthode proposée. Le défi est alors de pouvoir calculer ces \mathbb{Z} -polytopes en fonction du plus petit nombre possible de lattices, en choisissant intelligemment l'ordre et les règles d'éliminations des variables.

L'approche proposée est en cours d'implémentation en utilisant la librairie de manipulation de polyèdres PolyLib [9], ce qui devrait nous permettre de vérifier son efficacité et de comparer son coût par rapport aux autres approches.

Remerciement

Je remercie les relecteurs pour leurs remarques pertinentes, ainsi que Vincent Loechner et Benoît Meister pour leur apport significatif à cet article.

Bibliographie

1. A. Barvinok and K. Woods. Short rational generating functions for lattice point problems. *Journal of the American Mathematical Society*, 16 :657–979, 2003.

2. K. Beyls and E. D'Hollander. Reuse distance as a metric for cache behavior. In *IASTED conference on Parallel and Distributed Computing and Systems 2001 (PDCS01)*, pages 617–662, 2001.
3. V. Braberman, D. Garbervetsky, and S. Yovine. On synthesizing parametric specifications of dynamic memory utilization. Technical report, Oct. 2003.
4. S. Chatterjee, E. Parker, P. J. Hanlon, and A. R. Lebeck. Exact analysis of the cache behavior of nested loops. In *Proceedings of the ACM SIGPLAN 2001 Conference on Programming Language Design and Implementation*, pages 286–297. ACM Press, 2001.
5. P. Clauss and V. Loechner. Parametric Analysis of Polyhedral Iteration Spaces. *Journal of VLSI Signal Processing*, 19(2) :179–194, July 1998.
6. E. Ehrhart. Polynômes arithmétiques et méthode des polyèdres en combinatoire. *International Series of Numerical Mathematics*, 35, 1977.
7. S. Ghosh, M. Martonosi, and S. Malik. Cache miss equations : a compiler framework for analyzing and tuning memory behavior. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*, 21(4) :703–746, 1999.
8. B. Lisper. Fully automatic, parametric worst-case execution time analysis. MRTC report, Dept. of Computer Science and Engineering, Mälardalen University, Apr. 2003.
<http://www.mrtc.mdh.se/publ.php3?id=0531>.
9. V. Loechner. Polylib : A library for manipulating parameterized polyhedra. Technical report, LSIT - ICPS UMR7005 ULP-CNRS, Mar. 1999.
10. V. Loechner, B. Meister, and P. Clauss. Precise data locality optimization of nested loops. *Journal of Supercomputing*, 21(1) :37–76, 2002.
11. B. Meister. Using periodics in integer polyhedral problems. Technical report, LSIT - ICPS UMR7005 ULP-CNRS, 2003.
12. B. Meister. Projecting periodic polyhedra for loop nest analysis. In *Proceedings of the 11th Workshop on Compilers for Parallel Computers (CPC 04), Kloster Seeon, Germany*, pages 13–24, July 2004.
13. E. Parker and S. Chatterjee. An automata-theoretic algorithm for counting solutions to Presburger formulas. In *Compiler Construction 2004*, volume 2985 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 104–119, Apr. 2004.
14. W. Pugh. The omega test : a fast and practical integer programming algorithm for dependence analysis. In *Proceedings of the 1991 ACM/IEEE conference on Supercomputing*, pages 4–13. ACM Press, 1991.
15. W. Pugh. Counting solutions to presburger formulas : How and why. In *SIGPLAN Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'94)*, pages 121–134, 1994.
16. W. Pugh and D. Wonnacott. Experiences with constraint-based array dependence analysis. In *Principles and Practice of Constraint Programming*, pages 312–325, 1994.
17. R. Seghir. Dénombrement des points entiers de l'union et de l'image des polyèdres paramétrés. Master's thesis, June 2002.
18. A. Turjan, B. Kienhuis, and E. Deprettere. A compile time based approach for solving out-of-order communication in Kahn Process Networks. In *IEEE 13th International Conference on Application-specific Systems, Architectures and Processors (ASAP'2002)*, July 2002.
19. S. Verdoolaege, M. Bruynooghe, F. Catthour, and G. Janssens. Enumeration of integer projections of parametric polytopes. Technical report, Department of Computer Science, K.U.Leuven, 2004.
20. S. Verdoolaege, R. Seghir, K. Beyls, V. Loechner, and M. Bruynooghe. Analytical computation of Ehrhart polynomials : Enabling more compiler analyses and optimizations. In *Proceedings of International Conference on Compilers, Architectures, and Synthesis for Embedded Systems, Washington D.C.*, pages 248–258, Sept. 2004.