Une nouvelle méthode de calcul de l'enveloppe entière d'un polyèdre paramétré

Benoît Meister

Université Louis Pasteur - Strasbourg I, LSIIT - ICPS, Pôle API, F-67400 Illkirch
meister@icps.u-strasbg.fr

Mots-clefs : Enveloppe convexe, Optimisation combinatoire, Polyèdres paramétrés

1 Introduction

Soit P un polyèdre exprimé par un ensemble minimal de contraintes affines rationelles de variables $I \in \mathbb{Z}^n$ et de paramètres $N \in \mathbb{Z}^m$, de la forme $\sum_{k=1}^{n} a_k.i_k + \sum_{k=1}^{n} b_k.n_k + c \geq 0$ ou $= 0$, avec $a_k, b_k, c \in \mathbb{Z}$. Nous proposons une méthode originale de calcul de l'enveloppe entière de P, c'est à dire du polyèdre P' dont les sommets sont tous à coordonnées entières et qui contient exactement tous les points entiers de P. Des méthodes de résolution existent déjà [5], mais elles sont l'adaptation paramétrique d'algorithmes existants. Notre méthode calcule les sommets de P' à partir des contraintes de P, en calculant les bornes entières des coordonnées des points de P. Le calcul de bornes entières de chaque coordonnée donne naissance à des objets mathématiques périodiques appelés *pseudo-facettes*, qui sont le pendant entier des facettes d'un polyèdre. Elles dépendent périodiquement de la valeur des variables et des paramètres. Dans la section 2, nous montrons le raisonnement qui a mené à notre méthode dans le cas d'un polytope paramétré dont les sommets ont la même expression sur tout le domaine de définition des paramètres. Puis, dans la section 3, nous présentons brièvement les périodiques, et définissons les pseudo-facettes. La méthode de calcul et ses pièges sont présentées dans la section 4. Ensuite, nous montrons en section 5 comment notre méthode s'étend au cas général d'un polyèdre paramétré. Finalement, nous évoquerons quelques-uns de nos travaux présents et futurs en section 6.

2 Principe de résolution

Tout point entier $I_0 = \begin{pmatrix} i_{1,0} \\ i_{2,0} \\ \vdots \\ i_{n,0} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^n$ appartient à une droite définie par

$$d_k(I_0) = \{I = \begin{pmatrix} i_{1,0} \\ \vdots \\ i_{k-1,0} \\ i_k \\ i_{k+1} = i_{k+1,0} \\ \vdots \\ i_{n,0} \end{pmatrix}, i_k \in \mathbb{Q}, k \in [1..n]\}$$

Les valeurs de i_k dans $d_k(I_0) \cap P$ peuvent posséder des bornes inférieure $l(I_0)$ et supérieure $u(I_0)$ rationelles. Géométriquement, ces bornes sont déterminées par des facettes de P, disons $F_l(I, N)$

et $F_u(I,N)$, données par certaines fonctions $f_l(I,N)$ et $f_u(I,N)$ correspondant aux contraintes de P.

Quant aux valeurs de i_k dans l'ensemble des points *entiers* de $d_k(I_0) \cap P$, elles possèdent des bornes *entières* données par $f'_l(I_0,N) = \lceil f_l(I_0,N) \rceil$ et $f'_u(I_0,N) = \lfloor f_u(I_0,N) \rfloor$. L'expression de ces bornes entières est périodique, et l 'objet géométrique correspondant aux contraintes f' est appelé pseudo-facette de P selon i_k. Tout point entier I_0 de P est donc situé dans l'enveloppe convexe de deux points $I_{0,l}$ et $I_{0,u}$ de $d_k(I_0)$ avec pour coordonnées respectives $f'_l(I_0,N)$ et $f'_u(I_0,N)$ en i_k. $I_{0,l}$ et $I_{0,u}$ sont des points entiers situés sur des pseudo-facettes de P selon i_k. Soit P'' l'enveloppe entière de tous les points $I_{0,l}$ et $I_{0,u}$ existants. Par définition, elle est convexe et ses sommets sont entiers. P'' elle contient donc tous les points entiers de P. De plus, par construction, tous les points $I_{0,l}$ et $I_{0,u}$ sont à l'intérieur de P. Nous avons donc : $P'' \subseteq P$, donc P'' ne contient pas de point extérieur à P. P'' est donc l'enveloppe entière de P, car elle contient exactement tous les points entiers de P et ses sommets sont entiers.

Comme tous les points $I_{0,l}$ et $I_{0,u}$ appartiennent à des pseudo-facettes de P selon i_k, P'' est également l'enveloppe convexe des enveloppes entières des pseudo-facettes de P selon i_k.

3 Périodiques et pseudo-facettes

Un périodique M de dimension n et de période $S \in \mathbb{N}^n$ sur un monoïde K est la donnée $\{M_I\}$ de $q = s_1 \times s_2 \times \ldots \times s_n$ éléments de K, indexés par n indices entiers. Sa valeur au vecteur d'entiers $I \in \mathbb{Z}^n$ est $M(I) = M_{I_0}$ où $I_0 = I \ mod \ S$ (modulo élément par élément). La notion de périodique est introduite par Ehrhart dans ses travaux sur les polynômes arithmétiques (ou polynômes d'Ehrhart) [2, 3, 4] qui permettent de dénombrer les points entiers contenus dans un polyèdre rationel paramétré. Ceux-ci ont été étendus par Clauss [1] aux polynômes à plusieurs variables. Les premiers périodiques sont donc les coefficients de ces polynômes d'Ehrhart, les nombres périodiques, qui sont des périodiques sur $\mathbb{Q}$. Comme le nombre de valeurs que peut prendre un périodique est fixe pour chaque indice, un périodique peut être représenté par un tableau à n dimensions dont le nombre d'éléments dans la dimension k est s_k.

Exemple 1 Un nombre périodique de dimension 1 de période $S = \begin{pmatrix}3\end{pmatrix}$ dépendant de $i \in \mathbb{Z}$, dont la valeur est :

- $\frac{3}{2}$ pour i mod $3 = 0$
- 1 pour i mod $3 = 1$
- $\frac{7}{8}$ pour i mod $3 = 2$

peut se représenter ainsi : $\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & 1 & \frac{7}{8}\end{bmatrix}_i$

Un nombre périodique de dimension 2 et de période $S = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ dépendant de $(N,M) \in \mathbb{Z}^2$, dont la valeur est :

- 1 pour N mod $2 = 0$, M mod $3 = 0$
- 2 pour N mod $2 = 1$, M mod $3 = 0$
- 3 pour N mod $2 = 0$, M mod $3 = 1$
- 4 pour N mod $2 = 1$, M mod $3 = 1$
- 5 pour N mod $2 = 0$, M mod $3 = 2$
- 0 pour N mod $2 = 1$, M mod $3 = 2$

peut être représenté ainsi : $\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\2 & 4 & 0\end{bmatrix}_{N,M}$ □

Notre méthode remarque que les facettes d'un polyèdre constituent des bornes rationelles des valeurs possibles d'une variable i_k dans P. Elle calcule alors les bornes entières correspondantes, qui sont les pseudo-facettes de P selon i_k. La $q^{\text{ème}}$ facette $f_q(P)$ d'un polyèdre P peut être définie par un ensemble de e contraintes $f_{q,k}^r(P), r \in [1,e]$:

$$f_q^r(P) = \begin{cases} p^r(I,N) \geq 0 \ si \ r \neq q \\ \quad p^q(I,N) = 0 \end{cases}$$

Comme $p^q(I,N) = 0$ décrit une borne rationelle de i_k dans P, on notera $\mathcal{I}(p^q(I,N), i_k)$ l'expression périodique décrivant la borne entière correspondante. Elle est donnée par :

$$\mathcal{I}(p^r, i_k) = p^r(I,N) - (p^r(I,N) \ mod \ |a_k|) = 0$$

où a_k est le coefficient en i_k de $p^r(I,N)$.

La $q^{\text{ème}}$ *pseudo-facette* $f'_{q,k}(P)$ de P selon i_k est donc définie par un ensemble de e contraintes (périodiques) $f'^r_{q,k}(P), r \in [1,e]$:

$$f'^r_{q,k}(P) = \begin{cases} p^r(I,N) \geq 0 \ si \ r \neq q \\ \mathcal{I}(p^q(I,N), i_k) = 0 \end{cases}$$

Une pseudo-facette d'un polyèdre P de dimension n est de dimension $n-1$.

4 Méthode

En notant respectivement $int(P)$ et $conv(P)$ l'enveloppe entière et l'enveloppe convexe d'un polyèdre P, nous avons

$$int(P) = conv(\bigcup_q int(f'_{q,k}(P)))$$

On peut transformer une pseudo-facette en un polyèdre, à l'aide d'une transformation $\mathcal{C}$ qui :
- est inversible (on note $\mathcal{C}^{-1}$ son inverse),
- associe à tout point entier un point entier,
- conserve la convexité.

On a alors :

$$int(P) = conv(\bigcup_q int(\mathcal{C}(f'_{q,k}(P))))$$

C'est une relation de récurrence entre un polyèdre de dimension n et des polyèdres de dimension $n-1$. Cette relation permet d'obtenir récursivement des polyèdres de dimension 0, dont l'enveloppe convexe est l'enveloppe entière de P. La transformation de type $\mathcal{C}^{-1}$ permet de revenir dans l'espace des variables et des paramètres initial. Les sommets obtenus sont périodiques en fonction des paramètres. Il en est de même pour l'enveloppe entière de P qui est l'enveloppe convexe de ces sommets (car $conv(conv(P)) = conv(P)$).

5 Généralisation

Jusque là, seuls les *polytopes* dont les sommets ont une même expression sur tout le domaine de définition des paramètres ont été considérés. Les *polyèdres non bornés* ne jouent pas le rôle de borne inférieure ou supérieure pour toutes les variables. Dans ce cas, on considère la décomposition de Minkowski d'un polytope P en sommets, rayons et lignes. Nous pensons que l'enveloppe entière de P se décompose en les sommets entiers obtenus à partir des contraintes de P, les rayons de P et les lignes de P. Dans le cas général, le nombre de sommets d'un polyèdre paramétré et leur expression varient selon le domaine de paramètres considéré. Loechner présente dans [6] un découpage de l'espace des paramètres en domaines dans lesquels l'expression des sommets (rationnels) d'un polyèdre paramétré est la même. Ces domaines sont appelés *domaines de validité* des sommets. Deux solutions sont alors possibles pour généraliser notre méthode : nous pouvons calculer l'enveloppe entière paramétrique des polyèdres pour chaque domaine de vaidité, ou bien d'abord calculer tous les sommets possibles puis prendre en compte les sommets valides dans chaque domaine pour le calcul de l'enveloppe entière.

6 Conclusion

Nous avons proposé une nouvelle méthode de calcul de l'enveloppe entière d'un polyèdre paramétré, en utilisant les périodiques. Un logiciel, basé sur ce type de technique, est actuellement développé afin d'être intégré à la librairie de manipulation de polyèdres paramétrés *Polylib* [7]. La complexité de l'algorithme est intimement liée à celle de la solution. Une adaptation relativement simple permet le calcul du minimum lexicographique entier d'un polyèdre paramétré. Parallèlement, nous avons mis au point une adaptation de l'algorithme de Loechner qui permet de calculer les domaines de paramètres pour lesquels un polyèdre paramétré contient des points entiers. Une méthode de dénombrement de points entiers dans la projection entière des points entiers d'un polytope a également été mise au point en utilisant ce dernier résultat en combinaison avec les polynômes d'Ehrhart. La forme obtenue pour l'enveloppe entière permet une méthode nouvelle de calcul desdits polynômes d'Ehrhart. Lorsque les développements logiciels seront terminés, il nous sera important de les comparer en termes de performances avec d'autres outils existants.

References

[1] Ph. Clauss. Counting solutions to linear and nonlinear constraints through Ehrhart polynomials : Applications to analyze and transform scientific programs. In *10th ACM Int. Conf. on Supercomputing, Philadelphia*, 1996.

[2] E. Ehrhart. Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire i. *Reine Angew. Math.*, 226 :1–29, 1967.

[3] E. Ehrhart. Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire ii. *Reine Angew. Math.*, 227 :25–49, 1967.

[4] E. Ehrhart. *Polynômes arithmétiques et Méthode des Polyèdres en Combinatoire*, volume 35 of *International Series of Numerical Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel/Stuttgart, 1977.

[5] P. Feautrier. Parametric integer programming. *RAIRO Recherche Opérationnelle*, 22 :243–268, September 1988.

[6] V. Loechner. *Contribution à l'étude des polyèdres paramétrés et applications en parallélisation automatique*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, 1997. http ://icps.u-strasbg.fr/pub-97/.

[7] D.K. Wilde. A library for doing polyhedral operations. Technical Report 785, IRISA, Rennes, France, 1993.