Téléinformatique & Protocoles
TD7 : Codes d'erreur

Exercice I

On considère le code constitué de 7 bits d'information et un bit de contrôle de parité paire.

1. Ce code est-il un code linéaire ? Si oui donner sa matrice génératrice, son poids minimal et en déduire ses capacités de détection et de correction d'erreur.
2. Même question pour le code à contrôle de parité impaire.
3. Montrer qu'un polynôme $p(X)$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$ est divisible par $1 + X$ si et seulement si la somme des coefficients vaut 0 modulo 2.
4. Le code à parité paire est-il polynomial ? Si oui donner son polynôme générateur.
5. Même question pour le code à parité impaire.

Exercice II

On considère un code polynomial C de longueur n engendré par un polynôme $g(X)$ de degré $d = n - k$.

1. Soit $e(X)$ un polynôme correspondant à une configuration d'erreur. Autrement dit, supposons que le récepteur, au lieu de recevoir $p(X)$ qui est un mot de code, reçoit $p(X) + e(X)$. Montrer que cette erreur est détectable par C si et seulement si $g(X)$ ne divise pas $e(X)$.
2. Soit C' le code polynomial de longueur $n + 1$ engendré par $g'(X) = Xg(X)$. Quelle est la valeur du bit de poids faible d'un mot de C' ? Que peut-on dire des pouvoirs détecteurs et correcteurs de C' par rapport à ceux de C ? Conclusion ?

   On suppose par la suite, que $g(X)$ n'est pas divisible par X.
3. Montrer que si $g(X)$ divise $X^i P(X)$ alors il divise $P(X)$.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $g(x)$ pour que
   - C détecte une erreur
   - C détecte deux erreurs

   On dit qu'un code détecte des paquets d'erreurs de longueur p si et seulement si toute configuration d'erreurs portant sur p bits consécutifs est détectable. Par exemple des erreurs sur les bits 2 et 4 forment un paquet d'erreur de longueur 3.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $g(X)$ pour que C détecte les paquets d'erreur de longueur 2, et plus généralement de longueur p.
6. Quelles sont les capacités de détection d'erreurs indépendantes et de paquets d'erreur du code de longueur 12 engendré par $g(X) = X^2 + X + 1$.