Travaux Dirigés 2

La Couche Physique

1 Rappels

1.1 Séries de Fourier

Une fonction $s(t)$ périodique de fréquence f, régulière par morceaux peut être décomposée en une série de Fourier :

$$s(t) = \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2\pi nft) + b_n \cos(2\pi nft)$$

où :

$$\begin{aligned} c &= \frac{2}{T}\int_0^T s(t)dt \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T s(t)sin(2\pi nft)dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T s(t)cos(2\pi nft)dt \end{aligned}$$

L'intérêt des séries de Fourier (dans le contexte de ce TD) est simplement de montrer que les signaux ont un certain encombrement dans l'espace des fréquences et que même pour transmettre des signaux numériques, il faut une certaine largeur de bande.

1.1.1 Bande passante d'un medium

La bande passante d'un medium de transmission est l'ensemble des fréquences f telles qu'une sinusoïde de fréquence f peut être transmise sur ce medium sans atténuation notable. (Typiquement une atténuation "notable" commence à partir d'un rapport 1/2 entre la réception et l'émission $\approx 3dB$)

Idéalement, un signal sinusoïdal passe sans aucune atténuation si sa fréquence appartient à la bande passante et il ne passe pas du tout si sa fréquence n'appartient pas à cette bande passante.

1.1.2 Distortion

La bande passante permet de connaître le comportement d'un medium dans le cas d'un signal sinusoïdal. A priori, pour d'autres types de signaux on ne peut rien dire. Mais d'après Fourier, on peut décomposer tous les signaux (périodiques de fréquence f réguliers par morceaux) en une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences f, $2f$, $3f$, ...). Le signal de fréquence nf est appelé la n-ième l'harmonique. Moyennant cette décomposition, on peut ramener le cas de tous les signaux à celui des signaux sinusoïdaux. Autrement dit, la bande passante permet de connaître le comportement du medium pour tout signal.

Si toutes les sinusoïdes composantes passent alors le signal passe sans distortion (sans être déformé). Si aucune des sinusoïdes composantes ne passe, alors le signal ne passe pas. Dans les autres cas, seules certaines sinusoïdes passent sans atténuation, alors que les autres sont amorties. Dans ce cas, ce qu'on récupère à la sortie, c'est la somme des sinusoïdes qui sont passées. Le résultat est que le signal reçu est plus ou moins déformé. De façon plus générale, seules les harmoniques qui sont dans la bande passante peuvent traveser le medium sans atténuation. Plus les harmoniques atténuées contribuent à la forme du signal et plus le signal est déformé à la sortie.

1.1.3 Ce qu'il faut retenir

Supposons que pour reconstituer un signal il suffise de N harmoniques. Ces harmoniques recouvrent un intervalle de fréquence $[f_{min}, f_{max}]$. D'après ce qui vient d'être dit, ce signal ne pourra être transmis que sur un medium dont la bande passante recouvre l'intervalle $[f_{min}, f_{max}]$.

On verra plus tard que moyennant une modulation, il suffira simplement que la largeur de la bande passante du medium soit supérieure ou égale à celle de $[f_{min}, f_{max}]$.

1.2 Décibels $\leftrightarrow$ rapports

Dans la suite, P_A/P_B représentera un rapport de puissance ou d'énergie. Ce n'est pas nécessairement un rapport signal sur bruit.

En décibels, le rapport P_A/P_B vaut, par définition :

$$d = 10\,log_{10}\left(\frac{P_A}{P_B}\right) \Leftrightarrow \frac{P_A}{P_B} = 10^{\frac{d}{10}} \tag{1}$$

1.3 Débit binaire *versus* rapidité de modulation

Supposons que nous avons des signaux dépendant d'une horloge, et que pendant une période d'horloge, ces signaux ne peuvent que rester constants. La période d'horloge Δ peut aussi être appelée dans un contexte plus abstrait *"l'intervalle significatif"* du signal.

La *rapidité de modulation* R est le nombre de fois où un tel signal peut changer de niveau en une seconde. C'est l'inverse de Δ. $R = 1/\Delta$. Cette rapidité de modulation se mesure en *Bauds*.

Indépendamment de toute rapidité de modulation, en théorie de l'information, on mesure les quantités d'information en nombre de bits. La quantité d'information véhiculée par un signal est appelée le débit binaire D et se mesure en bits/seconde.

Lorsque le signal qui nous intéresse est bivalent, (il n'a que deux valeurs 0 et 1) alors chaque niveau du signal ne peut véhiculer qu'un seul bit d'information. Si le signal est quadrivalent (il a 4 niveaux), alors chaque niveau véhicule 2 bits. Avec 8 niveaux ce sera 3 bits. Le nombre de niveaux dans un signal est la *valence* V du signal.

De manière plus générale :

$$D = R \cdot log_2 V$$

1.4 Nyquist

On s'intéresse d'abord à la discrétisation dans le temps, avant de s'intéresser à la discrétisation des niveaux du signal.

Si un signal continu $s(t)$ a une fréquence maximale de f_{max}, et si on l'échantillonne à une fréquence de $f_{ech} = 2f_{max}$, ou plus, alors on est certain de pouvoir reconstituer le signal de départ $s(t)$ à partir du signal échantillonné dans le temps.

En particulier si on a un canal de bande passante H, alors tous les signaux qui passent à travers ce canal peuvent être échantillonnés avec une fréquence de $2H$ et ensuite, être reconstitués à la réception.

Si, en plus, le signal a un nombre limité de niveaux, alors on peut mesurer son débit binaire. Dans un canal avec une bande passante de largeur H, le débit binaire maximal est de :

$$D_{max} = 2H log_2(V)$$

Remarque : quand le nombre de niveaux V tend vers l'infini (on tend vers un signal avec des valeurs non discrètes) alors le débit binaire tend vers l'infini aussi.

1.5 Shannon

Jusque là nous n'avons pas encore parlé de bruit. En présence de bruit, le débit binaire diminue encore.

$$D = Hlog_2(1 + S/B)$$

Je peux retrouver cette formule à partir du précédent, mais pas par des moyens très orthodoxes. Si ça vous intéresse ...

Voici les exercices. J'ai mis l'exercice sur les séries de Fourier à la fin. C'est vous qui voyez si vous avez envie de commencer avec ça ou avec autre chose.

2 Décibels → rapports

$$\begin{aligned}
d = 10\,dB \Leftrightarrow \frac{P_A}{P_B} &= 10 \\
d = 3\,dB \Leftrightarrow \frac{P_A}{P_B} &= 10^{0.3} = 1.995 \approx 2 \\
d = 40\,dB \Leftrightarrow \frac{P_A}{P_B} &= 10^4 = 10000 \\
d = 37\,dB \Leftrightarrow \frac{P_A}{P_B} &= 10^{3.7} \approx 5012
\end{aligned}$$

3 Rapports → decibels

$$\begin{aligned}
\frac{P_A}{P_B} = 2000 \Leftrightarrow d &= 10\,log_{10}(2000) \approx 33.01 \\
\frac{P_A}{P_B} = 500 \Leftrightarrow d &= 10\,log_{10}(500) \approx 27 \\
\frac{P_A}{P_B} = 100000 \Leftrightarrow d &= 10\,log_{10}(100000) = 50
\end{aligned}$$

4 Rapidité de modulation, débit binaire, valence

1. $R = 1/T = 1/0.01 = 100\,Bauds$
   $D = R\,log_2(V) = R = 100\,bits/seconde$
2. $R = 1/\Delta = 1/100.10^{-3} = 10\,Bauds$
3. $D = R \cdot log_2 V = \frac{1}{\Delta} log_2(V) = 1/0.01\,log_2 16 = 400\,bit/s$

5 Un peu de bruit

1. En binaire, rapidité de modulation et débit binaire ont même valeur. (Remarquez que ce n'est pas le “canal de transmission” qui a un débit binaire de 2 400 bit/s, mais le signal qui circule dessus.)
   $R = D = 2400 Bauds$.

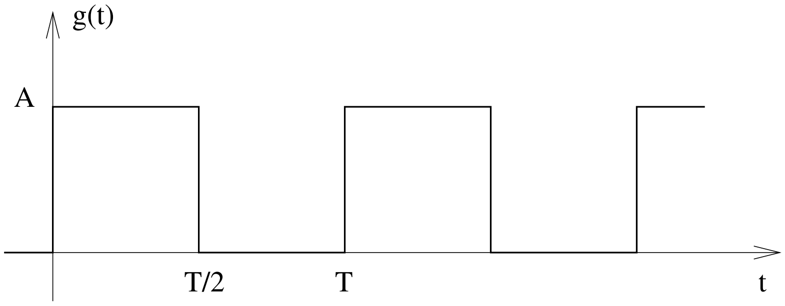

FIG. 1: Un signal carré $g(t)$ de période T.

2. $$D \geq Hlog_2(1+S/B) \Leftrightarrow \frac{S}{B} \leq 2^{\frac{D}{H}} - 1 = 2^{\frac{2400}{1000}} - 1 = 2^{2.4} - 1 \approx 4.28 bit/s$$

3. $$D = R\, log_2(V) = R\, log_2(4) = 2R \Leftrightarrow R = D/2 = 1200\, Bauds$$

6 Encore un peu de bruit

1. $$D = (108.10^3 - 60.10^3) log_2(1 + 10^{\frac{37}{10}}) \approx 590\; kbit/s$$

2. $$D = (108.10^3 - 60.10^3) log_2(1 + 10^4) \approx 639 kbit/s$$

3. Le débit binaire est plus grand quand le bruit est plus faible (?)

7 Fourier

7.1 Enoncé

On veut faire passer sur un canal un signal binaire avec une période d'horloge de $T/2$. On admettra que pour qu'un tel signal (non nécessairement périodique) puisse passer sur le canal, il faut et il suffit que le canal puisse véhiculer d'une part un signal constant (000000000... ou 111111...) et d'autre part qu'il puisse véhiculer un signal qui change de valeur à chaque top d'horloge (1010101010...). Ce dernier signal est un signal carré $g(t)$ de période T (cf figure 1).

1. Calculer la série de Fourier de $g(t)$.
2. Supposons que la bande passante du medium est de $[0, 10.1kHz]$. Quel est le nombre d'harmoniques qui passent si $T = 1ms$
3. Même question pour $T = 10ms, T = 0.1ms,$
4. A présent, supposons que $T = 1ms$ et prenons différents media avec différentes bandes passantes. Combien d'harmoniques passent sans atténuation si la bande passante du medium est l'intervalle $[0, 4kHz]$?
5. Même question pour une bande passante de $[0, 500Hz]$ $[0, 31kHz]$, $[1.2kHz, 50kHz]$?
6. Dans cet exercice, on supposera que N harmoniques suffisent pour représenter le signal ssi :

$$(a_{N+1}^2 + b_{N+1}^2) + (a_{N+2}^2 + b_{N+2}^2) + (a_{N+3}^2 + b_{N+3}^2) + ... \leq 0.02 \cdot A^2$$

On sait que :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Question : Montrer qu'il faut environ 10 harmoniques pour que $g(t)$ soit reçu convenablement.

7. Donner la largeur minimale de la bande passante du medium capable de véhiculer un tel signal.

7.2 Réponse

1. La série de Fourier du signal carré $g(t)$:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{2A}{3\pi} sin\left(\frac{6\pi}{T}t\right) + \frac{2A}{5\pi} sin\left(\frac{10\pi}{T}t\right) + \frac{2A}{7\pi} sin\left(\frac{14\pi}{T}t\right) + ... \\ &= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{sin\left(2\pi\left(2i+1\right)t/T\right)}{2i+1} \end{aligned}$$

2. Si la période est de $T = 1ms$ alors la fréquence des premières harmoniques est de $f_1 = 1\ kHz$, $f_2 = 2\ kHz$, $f_3 = 3\ kHz$, ..., $f_n = n\ kHz$. Donc si la bande passante est de $[0, 10.1\ kHz]$, il passe 10 harmoniques.
3. Si la période est de $T = 10\ ms$ alors la fréquence des premières harmoniques est de $f_1 = 0.1\ kHz$, $f_2 = 0.2\ kHz$, $f_3 = 0.3\ kHz$, ..., $f_n = n/10\ kHz$. Donc il passe 100 harmoniques.
   Si la période est de $T = 0.1\ ms$ alors la fréquence des premières harmoniques est de $f_1 = 10\ kHz$, $f_2 = 20\ kHz$, $f_3 = 30\ kHz$, ..., $f_n = 10.n\ kHz$. Donc seule passe la première harmonique.
4. Si la période est de $T = 1ms$ alors la fréquence des premières harmoniques est de $f_1 = 1\ kHz$, $f_2 = 2\ kHz$, $f_3 = 3\ kHz$, ..., $f_n = n\ kHz$. Donc si la bande passante est de $[0, 4\ kHz]$, il passe 4 harmoniques.
5. Avec $[0, 500\ Hz]$, il ne passe aucune harmonique, avec $[0, 31\ Hz]$, il en passe 31 et avec $[1.2\ kHz, 50\ kHz]$, il en passe 49, mais la fréquence fondamentale ne passe pas.
6. Pour montrer que 10 harmoniques suffisent il faut montrer qu'à partir de la 11-ième harmonique, la somme des coefficients au carré est négligeable par rapport à la puissance totale du signal $\sim A^2$.

$$\begin{aligned} (a_{11}^2 + b_{11}^2) + (a_{12}^2 + b_{12}^2) + (a_{13}^2 + b_{13}^2) + ... &= \\ a_{11}^2 + a_{13}^2 + a_{15}^2 + ... &= \\ \frac{4A^2}{\pi^2} \sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} &= \\ \frac{4A^2}{\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{8} - 1 - 1/9 - 1/25 - 1/47 - 1/81\right) & \\ &\approx 0.020 \cdot A^2 \end{aligned}$$

7. Donc pour $T = 1ms$, la dernière harmonique aura une fréquence de 10 kHz. Donc pour faire passer un tel signal carré il faudra que la bande passante laisse passer les fréquences comprises dans $[0, 10kHz]$.