TD de programmation fonctionnelle et logique

Corrigé du TD 7 : logique

Analyse de vérité

Au moyen d'une analyse de vérité, prouver les égalités suivantes :

1. $\neg(a \vee b) = (\neg a) \wedge (\neg b)$.

$a = 0$	$a = 1$
$\neg(0 \vee b) \leftrightarrow (\neg 0) \wedge (\neg b)$	$\neg(1 \vee b) \leftrightarrow (\neg 1) \wedge (\neg b)$
$\neg b \leftrightarrow 1 \wedge (\neg b)$	$\neg(1) \leftrightarrow 0 \wedge (\neg b)$
$\neg b \leftrightarrow \neg b$	$0 \leftrightarrow 0$
1	1

2. $a \rightarrow b = (\neg b) \rightarrow (\neg a)$ (c'est la formule du raisonnement par contraposée).

<table>
<tr><td colspan="2">$a = 0$</td><td colspan="2">$a = 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(0 \rightarrow b) \leftrightarrow ((\neg b) \rightarrow (\neg 0))$
$(0 \rightarrow b) \leftrightarrow ((\neg b) \rightarrow 1)$
$(0 \rightarrow b) \leftrightarrow 1$</td><td colspan="2">$(1 \rightarrow b) \leftrightarrow ((\neg b) \rightarrow (\neg 1))$
$(1 \rightarrow b) \leftrightarrow ((\neg b) \rightarrow 0)$
$(1 \rightarrow b) \leftrightarrow ((\neg b) \rightarrow 0)$</td></tr>
<tr><td>$b = 0$</td><td>$b = 1$</td><td>$b = 0$</td><td>$b = 1$</td></tr>
<tr><td>$(0 \rightarrow 0) \leftrightarrow 1$
$1 \leftrightarrow 1$
1
1</td><td>$(0 \rightarrow 1) \leftrightarrow 1$
$1 \leftrightarrow 1$
1
1</td><td>$(1 \rightarrow 0) \leftrightarrow ((\neg 0) \rightarrow 0)$
$0 \leftrightarrow (1 \rightarrow 0)$
$0 \leftrightarrow 0$
1</td><td>$(1 \rightarrow 1) \leftrightarrow ((\neg 1) \rightarrow 0)$
$1 \leftrightarrow (0 \rightarrow 0)$
$1 \leftrightarrow 1$
1</td></tr>
</table>

3. $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$.

<table>
<tr><td colspan="2">$a = 0$</td><td>$a = 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$((0 \wedge b) \vee c) \leftrightarrow ((0 \vee c) \wedge (b \vee c))$
$(0 \vee c) \leftrightarrow (c \wedge (b \vee c))$
$c \leftrightarrow (c \wedge (b \vee c))$</td><td>$((1 \wedge b) \vee c) \leftrightarrow ((1 \vee c) \wedge (b \vee c))$
$(b \vee c) \leftrightarrow (1 \wedge (b \vee c))$
$(b \vee c) \leftrightarrow (b \vee c)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$c \leftrightarrow (c \wedge (b \vee c))$</td><td>$1$</td></tr>
<tr><td>$b = 0$</td><td>$b = 1$</td><td></td></tr>
<tr><td>$c \leftrightarrow (c \wedge (0 \vee c))$
$c \leftrightarrow (c \wedge c)$
$c \leftrightarrow c$
1</td><td>$c \leftrightarrow (c \wedge (1 \vee c))$
$c \leftrightarrow (c \wedge 1)$
$c \leftrightarrow c$
1</td><td></td></tr>
</table>

4. $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$.

<table>
<tr><td>$a = 0$</td><td colspan="2">$a = 1$</td></tr>
<tr><td>$((0 \vee b) \wedge c) \leftrightarrow ((0 \wedge c) \vee (b \wedge c))$
$(b \wedge c) \leftrightarrow (0 \vee (b \wedge c))$
$(b \wedge c) \leftrightarrow (b \wedge c)$
1</td><td colspan="2">$((1 \vee b) \wedge c) \leftrightarrow ((1 \wedge c) \vee (b \wedge c))$
$(1 \wedge c) \leftrightarrow (c \vee (b \wedge c))$
$c \leftrightarrow (c \vee (b \wedge c))$
$c \leftrightarrow (c \vee (b \wedge c))$</td></tr>
<tr><td></td><td>$b = 0$</td><td>$b = 1$</td></tr>
<tr><td></td><td>$c \leftrightarrow (c \vee (1 \wedge c))$
$c \leftrightarrow (c \vee c)$
$c \leftrightarrow c$
1</td><td>$c \leftrightarrow (c \vee (1 \wedge c))$
$c \leftrightarrow (c \vee c)$
$c \leftrightarrow c$
1</td></tr>
</table>

Remarque : prouvez l'égalité $A = B$ est équivalent à montrer que $A \leftrightarrow B$ est une tautologie.

Mise sous Forme Normale Conjonctive

Mettre sous Forme Normale Conjonctive les formules suivantes (on pourra se servir des formules démontrées à la section précédente) :

1.
$$((p \to (q \vee r)) \wedge ((q \vee s) \to (t \wedge u))) \wedge \neg t$$

$$[p \to (q \vee r)] \wedge [(q \vee s) \to (t \wedge u)] \wedge [\neg t]$$

$p \to (q \vee r) = (q \vee r) \vee \neg p = q \vee r \vee \neg p$
$(q \vee s) \to (t \wedge u) = (t \wedge u) \vee \neg(q \vee s) = (t \wedge u) \vee (\neg q \wedge \neg s) = (t \vee (\neg q \wedge \neg s)) \wedge (u \vee (\neg q \wedge \neg s)) = (t \vee \neg q) \wedge (t \vee \neg s) \wedge (u \vee \neg q) \wedge (u \vee \neg s)$
D'où :

$((p \to (q \vee r)) \wedge ((q \vee s) \to (t \wedge u))) \wedge \neg t = (q \vee r \vee \neg p) \wedge (t \vee \neg q) \wedge (t \vee \neg s) \wedge (u \vee \neg q) \wedge (u \vee \neg s) \wedge \neg t$

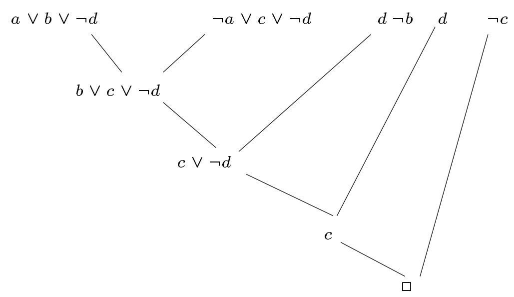
2.
$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \to (q \leftrightarrow r)$$

$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \to (q \leftrightarrow r) =$
$(q \leftrightarrow r) \vee \neg((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r)) =$
$((q \to r) \wedge (r \to q)) \vee (\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg r)) =$
$((r \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r)) \vee (\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg r)) =$
$((r \vee \neg q) \vee (\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg r))) \wedge ((q \vee \neg r) \vee (\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg r))) =$
$((r \vee \neg q) \vee ((\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee r))) \wedge ((q \vee \neg r) \vee ((\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee r))) =$
$(((r \vee \neg q) \vee (\neg p \vee \neg q)) \wedge ((r \vee \neg q) \vee (p \vee r))) \wedge (((q \vee \neg r) \vee (\neg p \vee \neg q)) \wedge ((q \vee \neg r) \vee (p \vee r))) =$
$(r \vee \neg q \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg q \vee p \vee r) \wedge (q \vee \neg r \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r \vee p \vee r) =$
$(r \vee \neg q \vee \neg p) \wedge (r \vee \neg q \vee p) =$
$(r \vee \neg q)$

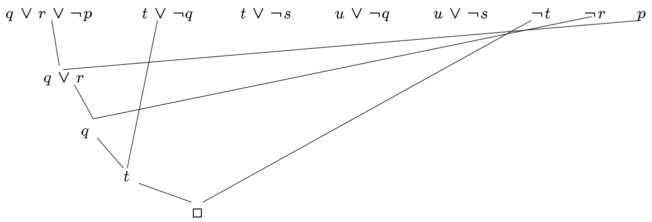
Méthode de résolution

Montrer par réfutation que :

1.
$$((a \vee b \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg b) \wedge d) \to c$$



2.
$$(((p \to (q \vee r)) \wedge ((q \vee s) \to (t \wedge u))) \wedge \neg t) \to (p \to r)$$



Transcription d'un énoncé

Une association est régie par le règlement intérieur suivant :

1. Les membres de la direction financière doivent être choisis parmi ceux de la direction générale.
   $f \to g$
2. Nul ne peut être à la fois membre de la direction générale et de la direction de la bibliothèque s'il n'est membre de la direction financière.
   $(g \wedge b) \to f$
3. Aucun membre de la direction de la bibiothèque ne peut être membre de la direction financière.
   $b \to \neg f$

On désigne par les lettre f, g et b les proposition atomiques « être membre de la direction financière », « être membre de la direction générale »,« être membre de la direction de la bibiothèque ».

Écrire sous forme décomposée l'ensemble des trois articles du règlement.

Montrer, par une analyse de vérité, que cet ensemble est sémantiquement équivalent à l'ensemble de deux propositions suivant : $\{f \to g,\ g \to \neg b\}$. Rédiger un nouveau règlement.

On veut établir la formule : $((f \to g) \wedge ((g \wedge b) \to f) \wedge (b \to \neg f)) \leftrightarrow ((f \to g) \wedge (g \to \neg b))$.

Nouveau règlement :

1. Les membres de la direction financière doivent être choisis parmi ceux de la direction générale.
2. Aucun membre de la direction générale ne peut être membre de la direction de la bibliothèque.

$b = 0$	$b = 1$	
$((f \to g) \wedge ((g \wedge 0) \to f) \wedge (0 \to \neg f)) \leftrightarrow ((f \to g) \wedge (g \to \neg 0))$ $((f \to g) \wedge (0 \to f) \wedge 1) \leftrightarrow ((f \to g) \wedge (g \to 1))$ $((f \to g) \wedge 1 \wedge 1) \leftrightarrow ((f \to g) \wedge 1)$ $(f \to g) \leftrightarrow (f \to g)$ 1	$((f \to g) \wedge ((g \wedge 1) \to f) \wedge (1 \to \neg f)) \leftrightarrow ((f \to g) \wedge (g \to \neg 1))$ $((f \to g) \wedge (g \to f) \wedge \neg f) \leftrightarrow ((f \to g) \wedge (g \to 0))$ $((f \to g) \wedge (g \to f) \wedge \neg f) \leftrightarrow ((f \to g) \wedge \neg g)$ $((f \to g) \wedge (g \to f) \wedge \neg f) \leftrightarrow ((f \to g) \wedge \neg g)$ $((f \to g) \wedge (g \to f) \wedge \neg f) \leftrightarrow ((f \to g) \wedge \neg g)$	
	$f = 0$	$f = 1$
	$((0 \to g) \wedge (g \to 0) \wedge \neg 0) \leftrightarrow ((0 \to g) \wedge \neg g)$ $(1 \wedge \neg g \wedge 1) \leftrightarrow (1 \wedge \neg g)$ $\neg g \leftrightarrow \neg g$ 1	$((1 \to g) \wedge (g \to 1) \wedge \neg 1) \leftrightarrow ((1 \to g) \wedge \neg g)$ $(g \wedge 1 \wedge \neg 1) \leftrightarrow (g \wedge \neg g)$ $(g \wedge 0) \leftrightarrow 0$ $0 \leftrightarrow 0$