Architecture des ordinateurs

TD 3 : Algèbre de Boole

Arnaud Giersch, Benoît Meister et Frédéric Vivien

1. Montrer comment l'opérateur **et** peut être obtenu à partir des opérateurs **ou** et **non**. De même pour l'opérateur **ou** avec les opérateurs **et** et **non**.
2. On note respectivement les opérateurs **ou**, **et**, **xor** et **non** par $+, \cdot, \oplus$ et $\overline{}$. Montrer à l'aide de tables de vérité que $A \oplus B = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$ et que $A \oplus B = (A+B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$
3. Montrer que $A + (\overline{A} \cdot B) = A + B$ et que $A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$
4. Déterminer le complément de l'expression $A + \overline{B} \cdot C$
5. Montrer que les deux règles d'associativité sont duales, i.e. montrer qu'à partir de la règle d'associativité de l'opérateur **ou**, on peut déduire, en utilisant les lois de de Morgan, l'associativité de l'opérateur **et** (et inversement).
6. Écrire l'expression $\overline{A \oplus B}$ uniquement avec les opérateurs **ou**, **et** et **non**
7. Montrer que la fonction **nor** forme un groupe logique complet.
8. Simplifier au maximum les expressions logiques suivantes.
   (a) $\overline{A} \cdot B + A \cdot B$
   (b) $(A+B) \cdot (A + \overline{B})$
   (c) $A + A \cdot B$
   (d) $A \cdot (A+B)$
   (e) $\overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A+B+C+D}$
   (f) $A + B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot (\overline{\overline{B} \cdot \overline{C}}) \cdot (A \cdot D + B)$
   (g) $(A \oplus B) \cdot B + A \cdot B$
   (h) $A + \overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$
9. Démontrer que toute fonction à trois variables $F(A,B,C)$ est égale à

$$F(A,B,C) = A \cdot F(1,B,C) + \overline{A} \cdot F(0,B,C)$$

10. Montrer que les lois de de Morgan s'étendent à un nombre quelconque de variables.
11. **Génération et simplification d'expressions logiques**
    Considérer la fonction définie par la table de vérité ci-dessous :

A	B	C	$F(A,B,C)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

(a) Générer une expression logique correspondante :

i. sous forme de sommes de produits ;

ii. sous forme de produits de sommes.

(b) Simplifier les deux expressions en utilisant les règles de l'algèbre de Boole.

(c) Construire le diagramme de Karnaugh et déterminer une expression logique associée.

12. Considérer les fonctions logiques suivantes. Pour chacune d'elles,
– construire le diagramme de Karnaugh ;
– utiliser le diagramme pour simplifier les expressions.

(a) $F_1(A,B,C) = A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$

(b) $F_2(A,B,C) = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} + A \cdot B \cdot C$

(c) $F_3(A,B,C) = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C$

(d) $F_4(A,B,C,D) = B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$

(e) $F_5(A,B,C,D) = \overline{A} + A \cdot B + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D$

(f) $F_6(A,B,C,D) = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot D + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$