Architecture des ordinateurs
Corrigé du TD 3 : Algèbre de Boole

Arnaud Giersch, Benoît Meister et Frédéric Vivien

1. Montrer comment l'opérateur **et** peut être obtenu à partir des opérateurs **ou** et **non**. De même pour l'opérateur **ou** avec les opérateurs **et** et **non**.

   Correction : *non(a ou b) = (non a) et (non b)* $\Rightarrow$ *non((non a) ou (non b)) = a et b*
   non(a et b) = (non a) ou (non b) $\Rightarrow$ *non((non a) et (non b)) = a ou b*

2. On note respectivement les opérateurs **ou**, **et**, **xor** et **non** par $+, \cdot, \oplus$ et $\overline{}$. Montrer à l'aide de tables de vérité que $A \oplus B = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$ et que $A \oplus B = (A + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$

   Correction : *Tables de vérités :*

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \oplus B$	$\overline{A} \cdot B$	$A \cdot \overline{B}$	$\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$
1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \oplus B$	$A + B$	$\overline{A} + \overline{B}$	$(A + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$
1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0

3. Montrer que $A + (\overline{A} \cdot B) = A + B$ et que $A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$

   Correction : *On utilise la distributivité de l'opérateur* **ou** *sur l'opérateur* **et***, et inversement :*

$$A + (\overline{A} \cdot B) = (A + \overline{A}).(A + B) = 1.(A + B) = A + B$$
$$A \cdot (\overline{A} + B) = (A \cdot \overline{A}) + (A \cdot B) = 0 + (A \cdot B) = A \cdot B$$

4. Déterminer le complément de l'expression $A + \overline{B} \cdot C$

   Correction : *On utilise les lois de de Morgan ; l'opérateur* **et** *est prioritaire :*

$$\overline{A + \overline{B} \cdot C} = \overline{A} \cdot \overline{\overline{B} \cdot C} = \overline{A} \cdot (B + \overline{C}) = \overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{C}$$

5. Montrer que les deux règles d'associativité sont duales, i.e. montrer qu'à partir de la règle d'associativité de l'opérateur **ou**, on peut déduire, en utilisant les lois de de Morgan, l'associativité de l'opérateur **et** (et inversement).

   Correction :

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A + (B + C)} = \overline{(A + B) + C} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A} \cdot (\overline{B} \cdot \overline{C}) = (\overline{A} \cdot \overline{B}) \cdot \overline{C}$$

   A, B, et C sont des variables muettes. Par changement de variable $\{(\overline{A} \rightarrow A'), (\overline{B} \rightarrow B'), (\overline{C} \rightarrow) C'\}$ *on obtient la propriété d'associativité du* **ou** *:* $A' \cdot (B' \cdot C') = (A' \cdot B') \cdot C'$

6. Écrire l'expression $\overline{A \oplus B}$ uniquement avec les opérateurs **ou**, **et** et **non**

   Correction : *D'après 2. :*

$$A \oplus B = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A \oplus B} = \overline{\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A \oplus B} = (A + \overline{B}) \cdot (\overline{A} + B)$$

7. Montrer que la fonction **nor** forme un groupe logique complet.

   Correction : *Pour cela, on montre que la fonction* **nor** *permet d'exprimer tous les opérateurs logiques :*
   - **non** *:* $nor(A, A) = \overline{A}$
   - **et** *:* $nor(nor(A, A), nor(B, B)) = nor(\overline{A}, \overline{B}) = \overline{\overline{A} + \overline{B}} = A \cdot B$
   - **ou** *:* $nor(nor(A, B), nor(A, B)) = \overline{nor(A, B)} = \overline{\overline{(A + B)}} = (A + B)$.

8. Simplifier au maximum les expressions logiques suivantes.

   (a) $\overline{A} \cdot B + A \cdot B$

   Correction :
$$\overline{A} \cdot B + A \cdot B = (\overline{A} + A) \cdot B = 1 \cdot B = B$$

   (b) $(A + B) \cdot (A + \overline{B})$

   Correction :
$$(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A + B \cdot \overline{B} = A + 0 = A$$

   (c) $A + A \cdot B$

   Correction :
$$A + A \cdot B = A \cdot 1 + A \cdot B = A \cdot (1 + B) = A \cdot 1 = A$$

   (d) $A \cdot (A + B)$

   Correction :
$$A \cdot (A + B) = (A + 0) \cdot (A + B) = A + 0 \cdot B = A + 0 = A$$

   (e) $\overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A + B + C + D}$

   Correction :
$$\begin{aligned} \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A + B + C + D} &= \overline{(A + B) \cdot (A + B + C + D)} \\ &= \overline{(A + B) \cdot ((A + B) + (C + D))} \end{aligned}$$

   donc, d'après l'exercice 8d,
$$= \overline{A + B}$$

   (f) $A + B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot (\overline{B \cdot \overline{C}}) \cdot (A \cdot D + B)$

   Correction :
$$A + B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot (\overline{B \cdot \overline{C}}) \cdot (A \cdot D + B) = (A + B \cdot \overline{C}) + (\overline{A + B \cdot \overline{C}}) \cdot (A \cdot D + B)$$

   d'après l'exercice 3,
$$A + B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot (\overline{B \cdot \overline{C}}) \cdot (A \cdot D + B) = (A + B \cdot \overline{C}) + (A \cdot D + B) = (A + A \cdot D) + (B + B \cdot \overline{C})$$

   d'après l'exercice 8c,
$$A + B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot (\overline{B \cdot \overline{C}}) \cdot (A \cdot D + B) = A + B$$

   (g) $(A \oplus B) \cdot B + A \cdot B$

Correction :

d'après l'exercice 2,

$$\begin{aligned}(A \oplus B) \cdot B + A \cdot B &= (\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}) \cdot B + A \cdot B \\ &= \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} \cdot B + A \cdot B \\ &= \overline{A} \cdot B + A \cdot B\end{aligned}$$

d'après l'exercice 8a,

$$= B$$

(h) $A + \overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$

Correction :

$$A + \overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B} = (A + \overline{A} \cdot B) + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

d'après l'excercice 3,

$$A + \overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B} = (A + B) + (\overline{A + B}) = 1$$

9. Démontrer que toute fonction à trois variables $F(A, B, C)$ est égale à

$$F(A, B, C) = A \cdot F(1, B, C) + \overline{A} \cdot F(0, B, C)$$

Correction : *A est une variable booléenne : les deux valeurs qu'elle peut prendre sont 0 et 1 :*
– *si $A = 0$, $0 \cdot F(1, B, C) + 1 \cdot F(0, B, C) = F(0, B, C) = F(A, B, C)$;*
– *si $A = 1$, $1 \cdot F(1, B, C) + 0 \cdot F(0, B, C) = F(1, B, C) = F(A, B, C)$.*

10. Montrer que les lois de de Morgan s'étendent à un nombre quelconque de variables.

Correction :

(a) $\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \cdots + \overline{A_n}$ *avec $n \geq 2$. La démonstration se fait par récurrence sur n (le nombre de variables).*

$n = 2$ *c'est la loi de de Morgan « basique » ;*

$n > 2$ *on utilise l'associativité de $+$ et $\cdot$:*

$$\begin{aligned}\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n} &= \overline{(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_{n-1}) \cdot A_n} \\ &= \overline{(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_{n-1})} + \overline{A_n} \\ &= (\overline{A_1} + \overline{A_2} + \cdots + \overline{A_{n-1}}) + \overline{A_n} \\ &= \overline{A_1} + \overline{A_2} + \cdots + \overline{A_{n-1}} + \overline{A_n}\end{aligned}$$

(b) $\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \cdots \cdot \overline{A_n}$ *avec $n \geq 2$. Le raisonnement est similaire.*

11. **Génération et simplification d'expressions logiques**
Considérer la fonction définie par la table de vérité ci-dessous :

A	B	C	$F(A, B, C)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

(a) Générer une expression logique correspondante :

i. sous forme de sommes de produits ;

Correction :

$$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B\cdot\overline{C}$$

ii. sous forme de produits de sommes.

Correction :

$$\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot C+A\cdot B\cdot C}=(A+B+C)\cdot(A+\overline{B}+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

(b) Simplifier les deux expressions en utilisant les règles de l'algèbre de Boole.

Correction :

i.

$$\begin{aligned}
&\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B\cdot\overline{C}\\
=&\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+(A+\overline{A})\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot(C+\overline{C})\\
=&\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\\
=&(A+\overline{A}\cdot C)\cdot\overline{B}+B\cdot\overline{C}\\
=&(A+C)\cdot\overline{B}+B\cdot\overline{C}\\
=&A\cdot\overline{B}+B\cdot\overline{C}+\overline{B}\cdot C\\
=&A\cdot\overline{B}+(B\oplus C)
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
&(A+B+C)\cdot(A+\overline{B}+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})\\
=&(A\cdot A+A\cdot\overline{B}+A\cdot\overline{C}+B\cdot A+B\cdot\overline{B}+B\cdot\overline{C}+C\cdot A+C\cdot\overline{B}+C\cdot\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})\\
=&(A+A\cdot B+A\cdot C+A\cdot\overline{B}+A\cdot\overline{C}+B\cdot\overline{C}+\overline{B}\cdot C)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})\\
=&A\cdot\overline{A}+A\cdot B\cdot\overline{A}+A\cdot C\cdot\overline{A}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{A}+A\cdot\overline{C}\cdot\overline{A}+B\cdot\overline{C}\cdot\overline{A}+\overline{B}\cdot C\cdot\overline{A}+\\
&A\cdot\overline{B}+A\cdot B\cdot\overline{B}+A\cdot C\cdot\overline{B}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{B}+A\cdot\overline{C}\cdot\overline{B}+B\cdot\overline{C}\cdot\overline{B}+\overline{B}\cdot C\cdot\overline{B}+\\
&A\cdot\overline{C}+A\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot C\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{C}\cdot\overline{C}+B\cdot\overline{C}\cdot\overline{C}+\overline{B}\cdot C\cdot\overline{C}\\
=&A\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{C}+\overline{B}\cdot C+B\cdot\overline{C}\\
=&(A\cdot\overline{B})\cdot(1+C+\overline{C})+\overline{B}\cdot C+(A+1)\cdot(B\cdot\overline{C})\\
=&A\cdot\overline{B}+B\cdot\overline{C}+\overline{B}\cdot C\\
=&A\cdot\overline{B}+(B\oplus C)
\end{aligned}$$

(c) Construire le diagramme de Karnaugh et déterminer une expression logique associée.

Correction : *Une table de Karnaugh se construit à partir de l'expression logique sous forme de somme de produits. Dans la somme de produits utilisée, chaque produit doit contenir toutes les variables de l'expression. Par exemple, on mettra une expression dépendant de A et B sous la forme d'une somme de produits de A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$. Pour mettre l'expression sous la forme voulue, la formule $(A+\overline{A})B=B$ est très utile.*

$$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B\cdot\overline{C}$$

Chaque colonne de la table de Karnaugh doit différer de ses voisines d'un et un seul littéral. Nous avons 3 variables et les tables de Karnaugh sont à 2 dimensions : il faut regrouper deux variables. Ici nous choisissons de regrouper B et C. On regroupe les 1 en morceaux rectangulaires, selon les principes suivants :

– *faire les plus grands morceaux possibles,*
– *faire le moins de morceaux possibles,*
– *le nombre de 1 dans un morceau doit être une puissance de 2,*
– *ne faire un nouveau morceau que s'il permet de regrouper des 1 qui n'ont pas encore été regroupés,*
en se rappelant que la ligne du bas et la ligne du haut sont considérées comme adjacentes, et qu'il en est de même pour la colonne la plus à droite et la colonne la plus à gauche.

A \ BC	$B\,C$	$\overline{B}\,C$	$\overline{B}\,\overline{C}$	$B\,\overline{C}$
A	0	1	1	1
$\overline{A}$	0	1	0	1

Chaque morceau donne naissance à un produit de variables. Lorsqu'une variable et son inverse sont dans le même morceau, cette variable s'élimine (parce que $(A + \overline{A}) = 1$*).*

$$\overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{C}$$

12. Considérer les fonctions logiques suivantes. Pour chacune d'elles,
   – construire le diagramme de Karnaugh ;
   – utiliser le diagramme pour simplifier les expressions.

   (a) $F_1(A, B, C) = A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$

   Correction : *La table de Karnaugh est présentée figure 1.*

A \ BC	$B\,C$	$\overline{B}\,C$	$\overline{B}\,\overline{C}$	$B\,\overline{C}$
A	1	1	0	1
$\overline{A}$	0	0	0	0

FIG. 1 – Table de Karnaugh pour $F_1(A, B, C)$.

A \ BC	$B\,C$	$\overline{B}\,C$	$\overline{B}\,\overline{C}$	$B\,\overline{C}$
A	1	1	1	0
$\overline{A}$	0	0	1	0

FIG. 2 – Table de Karnaugh pour $F_2(A, B, C)$.

   Expression simplifiée : $F_1(A, B, C) = A \cdot B + A \cdot C$.

   (b) $F_2(A, B, C) = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} + A \cdot B \cdot C$

   Correction : *La table de Karnaugh est présentée figure 2.*
   Expression simplifiée : $F_2(A, B, C) = A \cdot C + \overline{B} \cdot \overline{C}$

   (c) $F_3(A, B, C) = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C$

   Correction :

$$\begin{aligned} F_3(A, B, C) &= \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C \\ &= \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C \end{aligned}$$

   La table de Karnaugh est présentée figure 3.
   Expression simplifiée : $F_3(A, B, C) = \overline{B} + \overline{A} \cdot \overline{C}$

   (d) $F_4(A, B, C, D) = B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$

$A \backslash BC$	$B\,C$	$\overline{B}\,C$	$\overline{B}\,\overline{C}$	$B\,\overline{C}$
A	0	1	1	0
$\overline{A}$	0	1	1	1

FIG. 3 – Table de Karnaugh pour $F_3(A,B,C)$.

$AB \backslash CD$	$C\,D$	$\overline{C}\,D$	$\overline{C}\,\overline{D}$	$C\,\overline{D}$
$A\,B$	0	0	1	1
$\overline{A}\,B$	0	0	1	1
$\overline{A}\,\overline{B}$	0	0	0	0
$A\,\overline{B}$	0	0	0	0

FIG. 4 – Table de Karnaugh pour $F_4(A,B,C,D)$.

Correction :

$$\begin{aligned} F_4(A,B,C,D) &= B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} \\ &= A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} \end{aligned}$$

La table de Karnaugh est présentée figure 4.
Expression simplifiée : $F_4(A,B,C,D) = B \cdot \overline{D}$

(e) $F_5(A,B,C,D) = \overline{A} + A \cdot B + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D$

Correction :

$$\begin{aligned} F_5(A,B,C,D) &= \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot D \cdot + \cdot \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D \\ &+ \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} \\ &+ A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D + A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D \end{aligned}$$

La table de Karnaugh est présentée figure 5.
Expression simplifiée : $F_5(A,B,C,D) = B + \overline{A} + C$

$AB \backslash CD$	$C\,D$	$\overline{C}\,D$	$\overline{C}\,\overline{D}$	$C\,\overline{D}$
$A\,B$	1	1	1	1
$\overline{A}\,B$	1	1	1	1
$\overline{A}\,\overline{B}$	1	1	1	1
$A\,\overline{B}$	1	0	0	1

FIG. 5 – Table de Karnaugh pour $F_5(A,B,C,D)$.

$AB \backslash CD$	$C\,D$	$\overline{C}\,D$	$\overline{C}\,\overline{D}$	$C\,\overline{D}$
$A\,B$	1	1	0	0
$\overline{A}\,B$	0	0	1	1
$\overline{A}\,\overline{B}$	0	0	1	1
$A\,\overline{B}$	0	0	1	1

FIG. 6 – Table de Karnaugh pour $F_6(A,B,C,D)$.

(f) $F_6(A,B,C,D) = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot D + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$

Correction :

$$\begin{aligned} F_6(A,B,C,D) &= \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} \\ &+ \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} \\ &+ A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} \end{aligned}$$

La table de Karnaugh est présentée figure 6.
Expression simplifiée : $F_6(A,B,C,D) = \overline{A} \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot D + \overline{B} \cdot \overline{D}$