TD d'algorithmique avancée
TD 10 : Circuit de poids moyen minimal

Jean-Michel Dischler et Frédéric Vivien

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté, de fonction de pondération $w : A \to \mathbb{R}$, et soit $n = |S|$. On définit le **poids moyen** d'un circuit c formé des arcs $\langle e_1, e_2, ..., e_k \rangle$ ($c = \langle e_1, e_2, ..., e_k \rangle$) par :

$$\mu(c) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} w(e_i).$$

Soit $\mu^* = \min_{c \text{ circuit de } G} \mu(c)$. Un circuit c pour lequel $\mu(c) = \mu*$ est appelé **circuit de poids moyen minimal**. Nous étudions ici l'algorithme de Karp, qui est un algorithme efficace permettant de calculer μ^*.

Nous supposons, sans perte de généralité, que chaque sommet $v \in S$ est accessible à partir d'un sommet origine $s \in S$. Soit $\delta(s, v)$ le poids d'un plus court chemin de s vers v, et soit $\delta_k(s, v)$ le poids d'un plus court chemin de s vers v composé exactement de k arcs (si un tel chemin n'existe pas, $\delta_k(s, v) = +\infty$).

1. Montrez que le minimum μ^* est effectivement atteint, et est atteint sur un circuit élémentaire.
2. Montrez que si $\mu^* = 0$:
   (a) G ne contient aucun circuit de poids strictement négatif ;
   (b) $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ pour tous les sommets $v \in S$.
3. Montrez que, si $\mu^* = 0$,
   $$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0$$
   pour tout sommet $v \in S$. (*Indication* : on utilisera les deux propriétés démontrée à la question 2).
4. On suppose ici que $\mu^* = 0$. Soit c un circuit de poids nul, et soient u et v deux sommets quelconques de c. Soit x le poids du chemin de u à v le long du circuit c. Démontrez que $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$. (*Indication* : quel est le poids du chemin de v à u le long du circuit c ?)
5. Montrez que, si $\mu^* = 0$, il existe un sommet v sur le circuit de poids moyen minimal tel que
   $$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$
   (*Indication* : montrez qu'un plus court chemin vers un sommet quelconque du circuit de poids moyen minimal peut être étendu le long du circuit pour créer un plus court chemin vers le sommet suivant dans le circuit.)
6. Montrez que, si $\mu^* = 0$,
   $$\min_{v \in S} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$
7. Montrez que si l'on ajoute une constante t au poids de chaque arc de G, μ^* est également augmenté de t. Servez-vous de cette propriété pour montrer que
   $$\mu^* = \min_{v \in S} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$
8. Proposez un algorithme permettant de calculer μ^*. Quelle est sa complexité ?
9. Pourquoi l'hypothèse « chaque sommet $v \in S$ est accessible à partir d'un sommet origine $s \in S$ » n'est-elle pas restrictive ?