TD d'algorithmique avancée
Corrigé du TD 12 : Heuristique de rangement

Jean-Michel Dischler et Frédéric Vivien

On a n objets. Le i^e objet est de taille s_i avec $0 < s_i < 1$. On souhaite ranger ces objets dans des boîtes en utilisant le minimum de boîtes possibles, sachant que chaque boîte est de taille unitaire : chaque boîte peut contenir un sous-ensemble quelconque des objets du moment que la somme des tailles de ces objets n'excède pas 1.

Ce problème est NP-complet. Pour le résoudre on utilise l'heuristique **Fischer-Price** : on prend les objets l'un après l'autre et un objet est placé dans la première boîte qui peut l'accueillir. On note $S = \sum_{i=1}^{n} s_i$.

1. Montrez que le nombre optimal de boîtes nécessaires est au moins égal à $\lceil S \rceil$.
   Les boîtes doivent contenir une taille totale S d'objets. Chaque boîte étant de taille 1, il faut au moins $\lceil S \rceil$ boîtes pour contenir les objets ($\lceil S \rceil$ est le plus petit entier supérieur ou égal à S).
2. Montrez que l'heuristique Fischer-Price laisse au plus une boîte remplie à moins de la moitié.
   On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe au moins deux boîtes, notées A et B, qui sont remplies à moins de la moitié. Sans perte de généralités, on suppose que la boîte A a commencé à être remplie avant la boîte B. Soit x le premier objet ajouté à la boîte B. La boîte B étant à la fin de l'algorithme remplie à moins de la moitié et tous les poids étant positifs, x est de taille inférieure à $1/2$. A étant remplie à moins de la moitié à la fin de l'exécution de l'heuristique, et tous les poids étant positifs, A était remplie à moins de la moitié quand x a été rajouté à B. Donc l'heuristique, vu sa définition, a ajouté x à A au lieu de commencer à remplir une nouvelle boîte (B). Il y a contradiction et l'heuristique Fischer-Price laisse au plus une boîte remplie à moins de la moitié.
3. Démontrez que le nombre de boîtes utilisées par l'heuristique Fischer-Price n'est jamais strictement supérieur à $\lceil 2S \rceil$.
   Deux corrections différentes : une « brutale » par l'absurde, et une plus « subtile » et qui permet d'obtenir une borne plus fine :
   (a) *Nous venons de voir que l'heuristique Fischer-Price laisse au plus une boîte remplie à moins de la moitié. Donc toutes les boîtes sauf au maximum une sont remplies strictement à plus de la moitié. Raisonnons une fois de plus par l'absurde. Supposons que le nombre de boîtes utilisées, b, est strictement supérieur à $\lceil 2S \rceil$:*
   $$b > \lceil 2S \rceil \quad \Leftrightarrow \quad b \geq 1 + \lceil 2S \rceil \quad \Leftrightarrow \quad b - 1 \geq \lceil 2S \rceil.$$
   Or, d'après ce qui précède, (au moins) $b-1$ boîtes sont remplies strictement à plus de la moitié. Ces boîtes contiennent une taille totale t telle que :
   $$t > \frac{1}{2}(b-1) \geq \frac{1}{2}\lceil 2S \rceil \geq \frac{1}{2}2S = S.$$
   Donc $t > S$, ce qui est absurde puisque la taille totale des objets est S. Il y a donc contradiction et le nombre de boîtes utilisées par l'heuristique Fischer-Price n'est jamais strictement supérieur à $\lceil 2S \rceil$.
   (b) *On note de nouveau b le nombre de boîtes utilisées par l'heuristique. On note t_i la taille du contenu de la i^e boîte, c'est-à-dire la somme des tailles des objets contenus dans cette boîte. La taille totale des objets (S) est bien sûr égale à la somme des tailles contenues dans les boîtes : $S = \sum_{i=1}^{b} t_i$. Vu la question précédente, au maximum une boîte peut être remplie à moins de la moitié. Deux cas de figure se présentent :*

i. Aucune boîte n'est moins qu'à moitié remplie. Par conséquent toutes les boîtes sont remplies strictement plus qu'à moitié et pour tout $i \in [1, b], t_i > \frac{1}{2}$. D'où :

$$S = \sum_{i=1}^{b} t_i > b\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad b < 2S.$$

ii. Exactement une boîte est remplie à moins de la moitié. Supposons qu'il s'agit de la première : $t_1 \leq \frac{1}{2}$ et pour tout $i \in [2, b], t_i > \frac{1}{2}$. On suppose, sans perte de généralité, que la deuxième boîte est celle, parmi les $b - 1$ boîtes remplies strictement plus qu'à moitié, dont le contenu est le plus petit : $t_2 = \min_{2 \leq i \leq b} t_i$. On remarque que l'on a : $t_1 + t_2 > 1$: sinon l'heuristique aurait utilisé les objets d'une des deux boîtes pour compléter l'autre au lieu d'utiliser une boîte de plus. On tire de ce qui précède :

$$S = \sum_{i=1}^{b} t_i = t_1 + \sum_{i=2}^{b} t_i \geq t_1 + (b-1)t_2 = (t_1 + t_2) + (b-2)t_2 > 1 + (b-2)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}b.$$

On retrouve de nouveau : $b < 2S$.

Dans les deux cas on a montré l'inégalité : $b < 2S$, d'où l'on peut tirer : $b < \lceil 2S \rceil$ en majorant le membre droit par sa partie entière. On peut trouver une borne plus fine en remarquant que b est entier et que le plus grand entier inférieur ou égal à $2S$ est $\lfloor 2S \rfloor$, ce qui nous donne la borne : $b \leq \lfloor 2S \rfloor$.

4. Établir une borne égale à deux pour l'heuristique Fischer-Price.

   Soit b le nombre de boîtes utilisées par l'heuristique Fischer-Price et soit b^* le nombre de boîtes d'une solution optimale. On doit donc montrer que $b \leq 2b^*$. Or on sait que $b \leq \lceil 2S \rceil$ et que $\lceil S \rceil \leq b^*$. Il nous suffit donc de montrer que $\lceil 2S \rceil \leq 2\lceil S \rceil$. Or, par définition : $S \leq \lceil S \rceil$. Or :

$$S \leq \lceil S \rceil \quad \Rightarrow \quad 2S \leq 2\lceil S \rceil \quad \Rightarrow \quad \lceil 2S \rceil \leq 2\lceil S \rceil.$$

   Par conséquent :

$$b \leq \lceil 2S \rceil \leq 2\lceil S \rceil \leq 2b^*.$$

5. Donnez une implémentation de l'heuristique Fischer-Price.

   FISCHER-PRICE(s)
   $b \leftarrow 0$
   Pour $i \leftarrow 1$ à n **faire**
   $j \leftarrow 1$
   tant que $j \leq b$ et $s_i + taille[j] > 1$ **faire** $j \leftarrow j + 1$
   si $j \leq b$
   alors $taille[j] \leftarrow taille[j] + s_i$
   sinon $b \leftarrow b + 1$
   $taille[b] \leftarrow s_i$

6. Quelle est la complexité de votre heuristique ?

   La première boucle comporte n itérations, et la boucle ¡¡ tant que ¿¿ en compte au plus $\lceil 2S \rceil$ vu ce qui précède. D'où une complexité en $O(nS)$. (On peut aussi remarquer que $S \leq n$, car dans le pire cas il faut une boîte par objet, et obtenir une complexité en $O(n^2)$)