TD d'algorithmique avancée

Corrigé du TD 10 : Circuit de poids moyen minimal

Jean-Michel Dischler et Frédéric Vivien

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté, de fonction de pondération $w : A \to \mathbb{R}$, et soit $n = |S|$. On définit le **poids moyen** d'un circuit c formé des arcs $\langle e_1, e_2, ..., e_k\rangle$ ($c = \langle e_1, e_2, ..., e_k\rangle$) par :

$$\mu(c) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} w(e_i).$$

Soit $\mu^* = \min_{c \text{ circuit de } G} \mu(c)$. Un circuit c pour lequel $\mu(c) = \mu*$ est appelé **circuit de poids moyen minimal**. Nous étudions ici l'algorithme de Karp, qui est un algorithme efficace permettant de calculer μ^*.

Nous supposons, sans perte de généralité, que chaque sommet $v \in S$ est accessible à partir d'un sommet origine $s \in S$. Soit $\delta(s, v)$ le poids d'un plus court chemin de s vers v, et soit $\delta_k(s, v)$ le poids d'un plus court chemin de s vers v composé exactement de k arcs (si un tel chemin n'existe pas, $\delta_k(s, v) = +\infty$).

1. Montrez que le minimum μ^* est effectivement atteint, et est atteint sur un circuit élémentaire.

   Soit $\mathcal{C}$ un circuit de G. Si $\mathcal{C}$ n'est pas un circuit élémentaire, il existe un sommet u de G qui est visité au moins deux fois par $\mathcal{C}$. On décompose $\mathcal{C}$ comme suit : $\mathcal{C} = u \overset{c_1}{\rightsquigarrow} u \overset{c_2}{\rightsquigarrow} u ... u \overset{c_k}{\rightsquigarrow} u$ où chaque circuit c_i ne contient pas le sommet u comme sommet intermédiaire. Si un des circuits c_i n'est pas élémentaire, on le décompose comme on l'a fait pour $\mathcal{C}$. Finalement, on obtient une décomposition de $\mathcal{C}$ en somme de circuits élémentaires : $\mathcal{C} = \sum_{i=1}^{p} c_i$. $\mu(\mathcal{C}) = \frac{\sum_{i=1}^{p} w(c_i)}{\sum_{i=1}^{p} l(c_i)}$, où $l(c_i)$ est le nombre d'arcs constituant le circuit c_i. Soit $k \in [1, p]$ tel que $\frac{w(c_k)}{l(c_k)} \leq \min_{1\leq i\leq p} \frac{w(c_i)}{l(c_i)}$. On a alors :

   $$\mu(\mathcal{C}) = \frac{\sum_{i=1}^{p} w(c_i)}{\sum_{i=1}^{p} l(c_i)} \geq \frac{\sum_{i=1}^{p} w(c_k)\frac{l(c_i)}{l(c_k)}}{\sum_{i=1}^{p} l(c_i)} = \frac{w(c_k)}{l(c_k)}.$$

   Donc le poids moyen d'un circuit non élémentaire est toujours supérieur au minimum des poids moyens de ces circuits constitutifs et, sans perte de généralité, on peut calculer μ^* en ne considérant que les circuits élémentaires. Le nombre de circuits élémentaires étant bien évidemment fini (par exemple : un circuit définit un sous-ensemble des arcs, et le nombre de sous-ensembles d'un ensemble fini est fini), le minimum est atteint sur un circuit.

2. Montrez que si $\mu^* = 0$:

   (a) G ne contient aucun circuit de poids strictement négatif ;

   Si c est un circuit de poids strictement négatif, $\mu(c) < 0$ et, comme $\mu^* = 0$, $\mu(c) < \mu^*$, ce qui est absurde.

   (b) $\delta(s, v) = \min_{0\leq k\leq n-1} \delta_k(s, v)$ pour tous les sommets $v \in S$.

   Comme G ne contient pas de circuits de poids strictement négatifs, d'après la question précédente, les plus courts chemins sont bien définis. Si d est le poids d'un plus court chemin de s à v, il existe un chemin élémentaire de s à v de poids d : on prend un plus court chemin dont on ôte les éventuels circuits et, comme tous les circuits sont de poids positifs, on obtient un circuit encore plus court, donc de même poids. Un chemin élémentaire de G contient au plus $n - 1$ arcs puisque G contient n sommets. D'où le résultat.

3. Montrez que, si $\mu^* = 0$,
$$\max_{0\leq k\leq n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} \geq 0$$
pour tout sommet $v \in S$. (*Indication* : on utilisera les deux propriétés démontrée à la question 2).

$$\begin{array}{cc} \max_{0\leq k\leq n-1} \frac{\delta_n(s,v)-\delta_k(s,v)}{n-k} \geq 0 & \Leftrightarrow \\ \max_{0\leq k\leq n-1}(\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)) \geq 0 & \Leftrightarrow \\ \delta_n(s,v) - \min_{0\leq k\leq n-1} \delta_k(s,v) \geq 0 & \Leftrightarrow \\ \delta_n(s,v) - \delta(s,v) \geq 0 & \Leftrightarrow \\ \delta_n(s,v) \geq \delta(s,v) & \end{array}$$

La dernière équation étant vraie d'après les résultats de la question 2, résultats qui nous garantissent également que l'expression $\delta(s,v)$ est bien définie.

4. On suppose ici que $\mu^* = 0$. Soit c un circuit de poids nul, et soient u et v deux sommets quelconques de c. Soit x le poids du chemin de u à v le long du circuit c. Démontrez que $\delta(s,v) = \delta(s,u) + x$. (*Indication* : quel est le poids du chemin de v à u le long du circuit c ?)
On peut construire un chemin de s à v en concaténant un plus court chemin de s à u (de poids $\delta(s,u)$) avec le chemin de u à v le long de c (chemin de poids x). Ce chemin a un poids supérieur ou égal à celui d'un plus court chemin de s à v. D'où :
$$\delta(s,u) + x \leq \delta(s,v).$$
On construit un chemin de s à u symétriquement : on prend un plus court chemin de s à v, auquel on concatène le chemin de v à u le long de c (chemin de poids $-x$ car c est de poids nul et que le chemin de u à x le long de c a pour poids x). On obtient ainsi :
$$\delta(s,v) - x \leq \delta(s,u).$$
En combinant ces deux équations on obtient le résultat escompté.

5. Montrez que, si $\mu^* = 0$, il existe un sommet v sur le circuit de poids moyen minimal tel que
$$\max_{0\leq k\leq n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} = 0.$$
(*Indication* : montrez qu'un plus court chemin vers un sommet quelconque du circuit de poids moyen minimal peut être étendu le long du circuit pour créer un plus court chemin vers le sommet suivant dans le circuit.)
D'après la question 1, le minimum μ^* est atteint sur un circuit élémentaire. Soit c un tel circuit. On a donc $w(c) = 0$. Soit u_0 un sommet quelconque sur c. Soit p un plus court chemin de s à u_0 et soit $l(p)$ la longueur de ce chemin en nombre d'arcs. Pour $1 \leq i \leq n - l(p)$ on définit u_i comme le sommet suivant u_{i-1} le long du circuit c, et c_i comme le chemin de u_0 à u_i le long du circuit c. D'après la question précédente on a : $\delta(s, u_{n-l(p)}) = \delta(s,u_0) + w(c_{n-l(p)})$. Par construction, le chemin de s à u_0 puis de u_0 à $u_{n-l(p)}$ contient exactement n arcs. On a donc $\delta(s, u_{n-l(p)}) = \delta_n(s, u_{n-l(p)})$. Or l'équation à démontrer est équivalente à : $\delta_n(s,v) = \delta(s,v)$.

6. Montrez que, si $\mu^* = 0$,
$$\min_{v\in S} \max_{0\leq k\leq n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} = 0.$$
Cette question est une bête combinaison des résultats des questions 3 et 5.

7. Montrez que si l'on ajoute une constante t au poids de chaque arc de G, μ^* est également augmenté de t. Servez-vous de cette propriété pour montrer que
$$\mu^* = \min_{v\in S} \max_{0\leq k\leq n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k}.$$

On note w' la nouvelle fonction de pondération : $\forall a \in A, w'(a) = t + w(a)$. Soit c un circuit quelconque de G : $\mu'(c) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} w'(e_i) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(t + w(e_i)) = t + \mu(c)$. D'où $\mu'^* = t + \mu^*$.

À chaque arc on rajoute un poids $t = (-\mu^*)$. On obtient alors comme poids moyen minimal : $\mu'^* = 0$ et, d'après la question précédente,

$$\min_{v \in S} \max_{0 \le k \le n-1} \frac{\delta'_n(s,v) - \delta'_k(s,v)}{n-k} = 0.$$

Or $\delta'_n(s,v) - \delta'_k(s,v) = \delta_n(s,v) - \delta_k(s,v) + (n-k) \times (-\mu^*)$. D'où,

$$\min_{v \in S} \max_{0 \le k \le n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v) + (n-k) \times (-\mu^*)}{n-k} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\mu^* = \min_{v \in S} \max_{0 \le k \le n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k}.$$

8. Proposez un algorithme permettant de calculer μ^*. Quelle est sa complexité ?

Karp

pour chaque sommet u de G **faire**
  $\delta(s,v) \leftarrow +\infty$
  pour $k \leftarrow 1$ **à** n **faire** $\delta_k(s,v) \leftarrow +\infty$
$\delta_0(s,s) \leftarrow 0$
pour $k \leftarrow 1$ **à** n **faire**
  pour chaque arc (u,v) de G **faire**
    si $\delta_k(s,v) > \delta_{k-1}(s,u) + w(u,v)$ **alors**
      $\delta_k(s,v) \leftarrow \delta_{k-1}(s,u) + w(u,v)$
      si $\delta_k(s,v) < \delta(s,v)$ **alors**
        $\delta(s,v) \leftarrow \delta_k(s,v)$
        $k(v) \leftarrow k$
$\mu^* \leftarrow +\infty$
pour chaque sommet u de G **faire**
  si $\mu^* > \frac{\delta_n(s,u)-\delta(s,u)}{n-k(u)}$ **alors** $\mu^* \leftarrow \frac{\delta_n(s,u)-\delta(s,u)}{n-k(u)}$

Remarque : d'après la question 2, $k(u)$ ne peut pas être égal à n et il n'y a pas de risque de division par zéro dans l'algorithme.

La complexité de l'algorithme est en $O(|S|^2 + |S|.|A|)$: $O(|S|^2)$ pour les initialisations et $O(|S|.|A|)$ pour le calcul proprement dit. On pourrait réduire le coût de l'initialisation des valeurs de $\delta_k(s,v)$ en utilisant la boucle de calcul suivante, plus efficace mais peu esthétique :

pour $k \leftarrow 1$ **à** n **faire**
  pour chaque arc (u,v) de G **faire**
    $\delta_k(s,v) \leftarrow \delta_{k-1}(s,u) + w(u,v)$
pour $k \leftarrow 1$ **à** n **faire**
  pour chaque arc (u,v) de G **faire**
    si $\delta_k(s,v) > \delta_{k-1}(s,u) + w(u,v)$ **alors**
      $\delta_k(s,v) \leftarrow \delta_{k-1}(s,u) + w(u,v)$
      si $\delta_k(s,v) < \delta(s,v)$ **alors**
        $\delta(s,v) \leftarrow \delta_k(s,v)$
        $k(v) \leftarrow k$

Ici, la première boucle fait uniquement les $O(|S|.|A|)$ initialisations nécessaires. On n'y gagne que si $|A| < |S|$, cas somme toute rarissime !

9. Pourquoi l'hypothèse « chaque sommet $v \in S$ est accessible à partir d'un sommet origine $s \in S$ » n'est-elle pas restrictive ?

Pour contourner cette hypothèse il suffit de rajouter à G un sommet s et un arc de poids nul de s vers chacun des sommets de G pour se ramener dans les hypothèses de l'algorithme, cette construction étant moins chère que l'exécution de l'algorithme.