

## Travaux Dirigés de Programmation Fonctionnelle

### «λ-calcul»

#### I Syntaxe

Pour chacune des λ-expressions suivantes

- Déterminer s'il s'agit d'une constante, d'une variable, d'une abstraction ou d'une application, et faire de même pour les sous-expressions.
- Oter les parenthèses inutiles.
- Parenthésier complètement.

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\lambda x.(\lambda y.(+ x 3))$                                 | (b) $\lambda p.(\lambda q.p \lambda x.(x p)) \lambda i.\lambda j.(j i)$ |
| (c) $\lambda x.\lambda y.\lambda z.((+ 3 x) y) z) 5 \pi$            | (d) $\lambda x.\lambda y.\lambda z.((z x) (z y))$                       |
| (e) $\lambda x.(x 3)$   | (f) $\lambda a.(a \lambda b.(b a))$                                     |
| (g) $\lambda f.\lambda g.(\lambda h.(g h) f) \lambda p.\lambda q.p$ | (h) $\lambda e.\lambda i.\lambda o.\lambda u.(u (o (i e)))$             |

#### II Signification

Pour chacune des λ-expressions suivantes, donner son interprétation en tant que fonction anonyme.

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\lambda x.(\lambda y.(+ x 3))$               | (b) $\lambda f.(* (+ 3 2) 5)$                               |
| (c) $\lambda x.(x 3)$                             | (d) $\lambda x.(x x)$                                       |
| (e) $\lambda x.(3 x)$                             | (f) $\lambda e.\lambda i.\lambda o.\lambda u.(u (o (i e)))$ |
| (g) $\lambda x.\lambda y.\lambda z.((z x) (z y))$ | (h) $\lambda a.(a \lambda b.(b a))$                         |

#### III Réduction

Réduire les λ-expressions suivantes en utilisant la β-conversion. (Ces expressions sont telles que le problème de capture de variable ne se pose pas.) Indiquer le redex que vous choisissez en utilisant le symbole  $\lambda$ .

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\lambda a.\lambda b.(+ a b) 5$                                 | (b) $\lambda x.(+ x x) (\lambda y.y z)$                             |
| (c) $\lambda c.\lambda v.\lambda f.((c v) f) \lambda x.\lambda y.x$ | (d) $(\lambda x.\lambda y.(y x) \lambda p.\lambda q.p) \lambda i.i$ |

- (e)  $((\lambda x.\lambda y.\lambda z.((x y) z) \lambda f.\lambda a.(f a)) \lambda i.i) \lambda j.j$       (f)  $\lambda h.((\lambda a.\lambda f.(f a) h) h) \lambda g.(g g)$   
 (g)  $(\lambda p.\lambda q.(p q) (\lambda x.x \lambda a.\lambda b.a)) \lambda k.k$       (h)  $\lambda n.\lambda f.\lambda x.(f (n f x)) \lambda f.\lambda x.(f x)$

## IV Variables libres et liées

Pour chacune des  $\lambda$ -expressions suivantes et pour chaque occurrence de variable, indiquer si cette occurrence de variable est libre ou liée dans cette  $\lambda$ -expression.

- (a)  $\lambda x.\lambda y.(\lambda x.y \lambda y.x)$       (b)  $\lambda x.(x (\lambda y.(\lambda x.x y) x))$   
 (c)  $\lambda a.(\lambda b.a \lambda b.(\lambda a.a b))$       (d)  $(\lambda free.bound \lambda bound.(\lambda free.free bound))$   
 (e)  $(\lambda x.x y) (\lambda y.y)$       (f)  $(\lambda x.(x y)) (\lambda y.y)$   
 (g)  $\lambda x.\lambda y.\lambda z.(\lambda z.(z \lambda x.y))$       (h)  $(\lambda x.\lambda y.(x z (y z))) (\lambda x.(y \lambda y.y))$

## V Capture de variable

Pour chacun des redex suivants, déterminer si le problème de capture de variable se pose. Si oui, appliquer la  $\alpha$ -conversion nécessaire.

- (a)  $\lambda x.(x \lambda y.y) \lambda x.\lambda y.x$       (b)  $\lambda x.(\lambda x.x \lambda y.x) \lambda y.x$   
 (c)  $\lambda x.\lambda y.(x y) \lambda x.y$       (d)  $\lambda x.\lambda y.(y x) \lambda y.x$   
 (e)  $\lambda x.\lambda y.(y x) \lambda x.y$       (f)  $\lambda x.(z x \lambda y.(y z)) \lambda x.(y \lambda y.y)$   
 (g)  $\lambda x.(z \lambda y.(x (y z))) \lambda x.(y \lambda y.y)$

## VI Ordre de réduction

Réduire chacune des  $\lambda$ -expressions suivantes, sous forme normale en utilisant :

1. la stratégie NOR (ordre normal).
2. la stratégie AOR (ordre applicatif).

A chaque étape de la réduction, indiquer le redex choisi en utilisant le symbole  $\lambda$ .

- (a)  $\lambda x.(\lambda z.z x y) \lambda y.y$       (b)  $\lambda x.\lambda y.(z (\lambda z.(z \lambda x.y)))$   
 (c)  $\lambda y.(+ (\lambda x.x y) y) (\lambda y.(* 2 y) 1)$       (d)  $\lambda f.\lambda x.(f x) \lambda x.\lambda a.(x a) \lambda x.x \lambda y.y$   
 (e)  $\lambda x.\lambda y.(x z (y z)) \lambda x.(\lambda y.y y)$       (f)  $\lambda h.(\lambda x.(h (x x)) \lambda x.(h (x x))) \lambda f.\lambda x.x (+ 1 5)$   
 (g)  $\lambda n.\lambda m.(m n) \lambda f.\lambda x.(f (f x)) \lambda f.\lambda x.(f (f x))$