Sur le dénombrement des solutions d'un système linéaire en nombres entiers paramétrique

Philippe Clauss
ICPS, Université Louis Pasteur, Strasbourg,
Pôle API, Bd Sébastien Brant,
67400 Illkirch France
clauss@icps.u-strasbg.fr
http://icps.u-strasbg.fr

September 26, 1996

Résumé

Le problème du dénombrement des solutions entières d'un système linéaire paramétrique, appelé plus communément *système diophantien*, concerne de nombreux domaines tels que la combinatoire, la programmation linéaire en nombres entiers, l'infographie, l'informatique parallèle, ...

Nous adoptons une approche géométrique pour la résolution de ce problème, en dénombrant les points à coordonnées entières, inclus dans un polytope à sommets entiers (*polytope entier*) ou à sommets rationnels (*polytope rationnel*).

Nous présentons nos résultats, basés sur les travaux du mathématicien Eugène Ehrhart [4, 5, 6, 8], que nous étendons à une classe plus large de problèmes, et pour lesquels nous proposons un algorithme pour une implantation logicielle [1, 2, 3].

Nous montrons également les voies de recherches restantes dans ce domaine, pour lesquelles seule une conjecture et des résultats limités d'Ehrhart existent à ce jour.

La présentation suit une chronologie où les systèmes diophantiens paramétriques considérés sont de plus en plus complexes:

- Systèmes d'inégalités P_n à un paramètre de la forme,

$$\sum_i a_i x_i \leq bn + c$$

où les a_i et les b sont des constantes entières, les c sont des constantes rationnelles, les x_i sont les variables entières du problème et n est un paramètre entier positif.

Cette forme de systèmes P_n a été entièrement étudiée par Ehrhart. Il les définit comme étant des systèmes *homothétiques bordés*, où n'importe quel P_n se déduit de P_1 par une homothétie de rapport n et de centre O. Il démontre que le nombre de solutions entières d'un tel système, i.e. le nombre de points entiers du polytope P_n ainsi défini, est un polynôme ou un *pseudo-polynôme* en n, de degré égal à la dimension de l'espace affine contenant P_n, connu sous le nom de *polynôme d'Ehrhart* [10]. Si P_n est un polytope rationnel, c'est un pseudo-polynôme, i.e. un polynôme où les coefficients sont des *nombres périodiques* au lieu d'être constants.

- Systèmes d'inégalités P_N à un nombre quelconque de paramètres, $N = (n_1, \ldots, n_p)$, de la forme,

$$\sum_i a_i x_i \leq \sum_j b_j n_j + c$$

où les a_i et les b_j sont des constantes entières, les c sont des constantes rationnelles, les x_i sont les variables entières du problème et les n_j sont des paramètres entiers positifs.

Nous démontrons que les résultats d'Ehrhart peuvent être étendus à cette forme de systèmes : Nous les définissons comme étant des systèmes homothétiques bordés, où n'importe quel $P_{0,0,\ldots,n_j,0,\ldots,0}$ se déduit de $P_{0,0,\ldots,1,0,\ldots,0}$ par une homothétie de rapport n_j et de centre O. Nous démontrons que le nombre de solutions entières d'un tel système est défini sur plusieurs domaines disjoints de valeurs des paramètres, par des polynômes ou pseudo-polynômes à plusieurs variables n_j, de degré égal à la dimension de l'espace affine contenant P_N. Si P_N est un polytope rationnel sur un ou plusieurs domaines de valeurs des paramètres, ce sont des pseudo-polynômes à plusieurs variables, i.e. des polynômes à plusieurs variables où les coefficients sont des nombres multi-périodiques.

Nous proposons un algorithme de calcul de ces polynômes et pseudo-polynômes, utilisant l'algorithme de Loechner/Wilde de calcul des coordonnées paramétriques des sommets d'un polyèdre et des domaines de valeurs des paramètres [9, 3], et basé sur la résolution de systèmes d'égalités diophantiennes linéaires.

• Systèmes d'inégalités P_N à un nombre quelconque de paramètres, où les paramètres peuvent être coefficients des variables, de la forme,

$$\sum_k \left(\left(\prod_{j \in J_k} n_j \right) \left(\sum_i d_{ik} x_i \right) \right) + \sum_i a_i x_i \leq \sum_j b_j n_j + c$$

où les a_i, b_j et d_{ik} sont des constantes entières, les c sont des constantes rationnelles, les x_i sont les variables entières du problème et les n_j sont des paramètres entiers positifs. Le problème du dénombrement paramétrique des solutions entières d'un tel système est loin d'être résolu. Toutefois, Ehrhart a déjà démontré des résultats généraux mais limités aux systèmes de ce type à deux variables et à un seul paramètre [7]. Il a conjecturé que le nombre de solutions entières, pour un nombre quelconque de paramètres et de variables, est défini sur plusieurs domaines disjoints de valeurs des paramètres, par des polynômes ou pseudo-polynômes à plusieurs variables.

Dans le cas où en plus, les paramètres peuvent être élevés à la puissance, aucun résultat n'est connu à ce jour.

References

[1] Ph. Clauss. The volume of a lattice polyhedron to enumerate processors and parallelism. Research Report ICPS 95-11, 1995. `http://icps.u-strasbg.fr/pub-95/pub-95-11.ps.gz`

[2] Ph. Clauss. Counting Solutions to Linear and Nonlinear Constraints through Ehrhart polynomials: Applications to Analyze and Transform Scientific Programs. *10th ACM Int. Conf. on Supercomputing*, Philadelphia, May 1996. Also available as Research Report ICPS 96-03. `http://icps.u-strasbg.fr/pub-96/pub-96-03.ps.gz`

[3] Ph. Clauss and V. Loechner. Parametric Analysis of Polyhedral Iteration Spaces. *IEEE Int. Conf. on Application Specific Array Processors, ASAP'96*, Chicago, Illinois, August 1996. Also available as Research Report ICPS 96-04. `http://icps.u-strasbg.fr/pub-96/pub-96-04.ps.gz`

[4] E. Ehrhart. Sur les polyèdres rationnels homothétiques à n dimensions. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 254:616-618, 1962.

[5] E. Ehrhart. Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire I. *J. Reine Angew. Math.*, 226:1-29, 1967.

[6] E. Ehrhart. Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire II. *J. Reine Angew. Math.*, 227:25-49, 1967.

[7] E. Ehrhart. Sur les systèmes d'inéquations diophantiennes linéaires, *J. Reine Angew. Math.*, 262/263, 45-57, 1973.

[8] E. Ehrhart. *Polynômes arithmétiques et Méthode des Polyèdres en Combinatoire.* International Series of Numerical Mathematics, vol.35, Birkhäuser Verlag, Basel/Stuttgart, 1977.

[9] V. Loechner and D. K. Wilde. Parameterized polyhedra and their vertices. Research Report ICPS 96-09, 1996. `http://icps.u-strasbg.fr/pub-96/pub-96-09.ps.gz`

[10] R. P. Stanley. *Enumerative Combinatorics Volume I.* Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, California, 1986.