Sur le dénombrement des solutions d'un système linéaire en nombres entiers paramétrique

Philippe Clauss

ICPS

Université Louis Pasteur
Strasbourg

Approche géométrique

Problèmes équivalents :

Dénombrement des solutions entières
d'un système d'équations linéaires

$\Leftrightarrow$

Dénombrement des points à coordonnées entières inclus dans un polytope

Equations ou polytopes paramétriques :

Équations dépendant linéairement de paramètres entiers positifs

ou

Polytopes dont les sommets possèdent des coordonnées dépendant linéairement de paramètres entiers positifs

I. Définitions et résultats d'Eugène Ehrhart à un seul paramètre

▹ *Systèmes homothétiques bordés*
▹ *Récurrence d'Euler et produit caractéristique*
▹ *Théorême fondamental : polynômes et pseudo-polynômes d'Ehrhart*
▹ *Loi de réciprocité*
▹ *Méthodes de calcul des polynômes d'Ehrhart*

II. Extension à un nombre quelconque de paramètres

▹ *Systèmes homothétiques bordés à plusieurs paramètres*
▹ *Théorême fondamental et polynômes d'Ehrhart à plusieurs variables*
▹ *Méthodes de calcul des polynômes d'Ehrhart à plusieurs variables*

III. Premiers résultats d'Ehrhart sur une classe plus large d'équations, et problèmes non résolus.

▹ *Résultats d'Ehrhart en deux dimensions et un paramètre*
▹ *Problèmes ouverts*

Définitions et résultats d'Eugène Ehrhart à un seul paramètre

Systèmes homothétiques H_n

$$\sum a_i x_i = bn \qquad \sum a_i x_i < bn \qquad \sum a_i x_i \leq bn$$

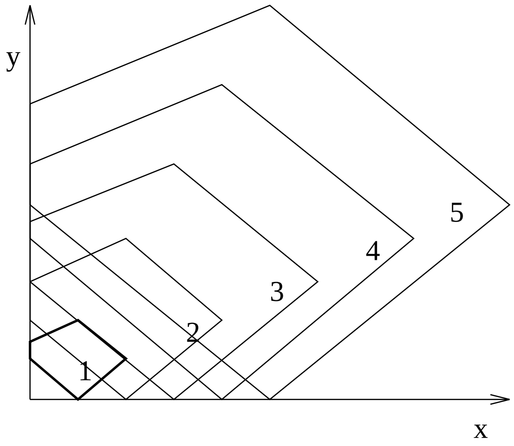
a_i, b : entiers x_i : variables n : paramètre entier positif

$H_1 \Rightarrow$ Domaine polyédrique borné P_1

$\Rightarrow P_n$ **correspond à** P_1 **par l'homothétie de centre** O **et de rapport** n

Exemple :

$$H_n \begin{cases} x - 2y \leq n \\ x + 2y \geq n \\ x \geq 0 \\ x - 4y \geq -3n \\ x + 2y \leq 3n \end{cases}$$



Systèmes bordés B_n

$\sum a_i x_i = bn + c \quad \sum a_i x_i < bn + c \quad \sum a_i x_i \leq bn + c$

a_i, b : entiers x_i : variables n : paramètre entier positif

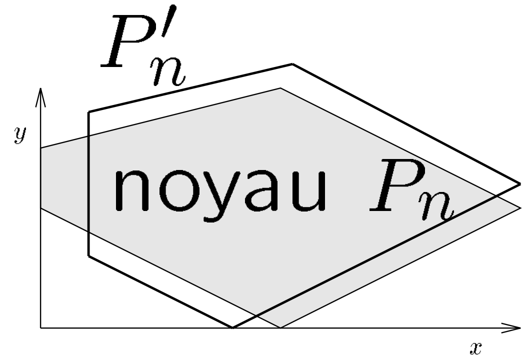
c : rationnel

En supprimant tous les c
$\Rightarrow$ Système homothétique H_n
définissant P_n

Ajout d'un hyperplan parallèle
à chaque facette de P_n
à une distance indépendante de n
$\Rightarrow$ **Polytope bordé P'_n de noyau P_n**

<u>Exemple</u> :

$$H_n \begin{cases} x - 2y \leq n - 1 \\ x + 2y \geq n - 1 \\ x \geq 1 \\ x - 4y \geq -3n - 1 \\ x + 2y \leq 3n + 1 \end{cases}$$



Nombres périodiques $u(n)$

$$u(n) = [u_1, u_2, \ldots, u_p]_n$$

$$u(n) = \begin{cases} u_1 & si\ n\ mod\ p = 1 \\ u_2 & si\ n\ mod\ p = 2 \\ \ldots & \ldots \\ u_p & si\ n\ mod\ p = 0 \end{cases}$$

$p =$ **période de** $u(n)$

Pseudo-polynôme $f(n)$

$$f(n) = u_k(n)n^k + u_{k-1}(n)n^{k-1} + \ldots + u_0(n)$$

$ppcm$ des périodes des u_q
$=$ **pseudo-période de** $f(n)$

Exemple : $f(n) = [0,1,2]\,n + [0,1]$

$$= \begin{cases} 0 & si\ n\ mod\ 3 = 1\ et\ n\ mod\ 2 = 1 \\ 1 & si\ n\ mod\ 3 = 1\ et\ n\ mod\ 2 = 0 \\ n & si\ n\ mod\ 3 = 2\ et\ n\ mod\ 2 = 1 \\ n+1 & si\ n\ mod\ 3 = 2\ et\ n\ mod\ 2 = 0 \\ 2n & si\ n\ mod\ 3 = 0\ et\ n\ mod\ 2 = 1 \\ 2n+1 & si\ n\ mod\ 3 = 0\ et\ n\ mod\ 2 = 0 \end{cases}$$

Relation de récurrence eulérienne

$$\Pi(t) = (1 - t^{a_1})(1 - t^{a_2}) \dots (1 - t^{a_s}), a_i \in \mathcal{N}^+$$

Développement du produit et remplacement de t^r par t^{n-r}

$\Rightarrow$ **Relation de récurrence linéaire homogène** $\{\Pi(t)\} = 0$

Solution générale d'une telle récurrence

$=$ **pseudo-polynôme**

$=$ **Déterminée par une fonction rationnelle génératrice**

$$\frac{P(t)}{\Pi(t)} = \sum_0^\infty f(n) t^n$$

Résultat d'Euler : le nombre de solutions entières de $\sum a_i X_i = n, X_i \geq 0$ est déterminé par le produit $\prod (1 - t^{a_i})$

Polytope entier

…tous les sommets ont des coordonnées entières

Polytope rationnel

…au moins un sommet possède des coordonnées rationnelles

Dénominateur d'un point rationnel

…*ppcm* des dénominateurs de ses coordonnées

Dénominateur d'un polytope rationnel

…*ppcm* des dénominateurs de ses sommets

Produit caractéristique d'un polytope

…produit $\prod(1 - t^{a_i})$ où les a_i sont les dénominateurs de ses sommets

Théorême fondamental d'Ehrhart

Nombre de points entiers d_n
de tout polytope homothétique-bordé P_n
de dimension k

**vérifie la relation de récurrence
eulérienne** $\{\prod(d)\} = 0$

P_n **entier :**
polynôme en n **de degrée** k

P_n **rationnel :**
pseudo-polynôme en n **de degré** k **et de
pseudo-période égale au dénominateur
de** P_n

Résultats d'Ehrhart

$$
\begin{aligned}
j(n) &= \text{nombre de points entiers de } P_n \\
i(n) &= \text{nombre de points entiers intérieurs} \\
& \text{à } P_n \text{ (facettes exclues)}
\end{aligned}
$$

Loi de réciprocité

$$i(n) = (-1)^k \; j(-n) \quad j(n) = (-1)^k \; i(-n)$$

$$
\begin{aligned}
V &= \text{volume de } P_1 \\
S &= \text{somme des volumes des facettes de } P_1 \\
p &= \text{nombre de points entiers des facettes} \\
& \text{de } P_1 \\
i &= \text{nombre de points entiers intérieurs à } P_1
\end{aligned}
$$

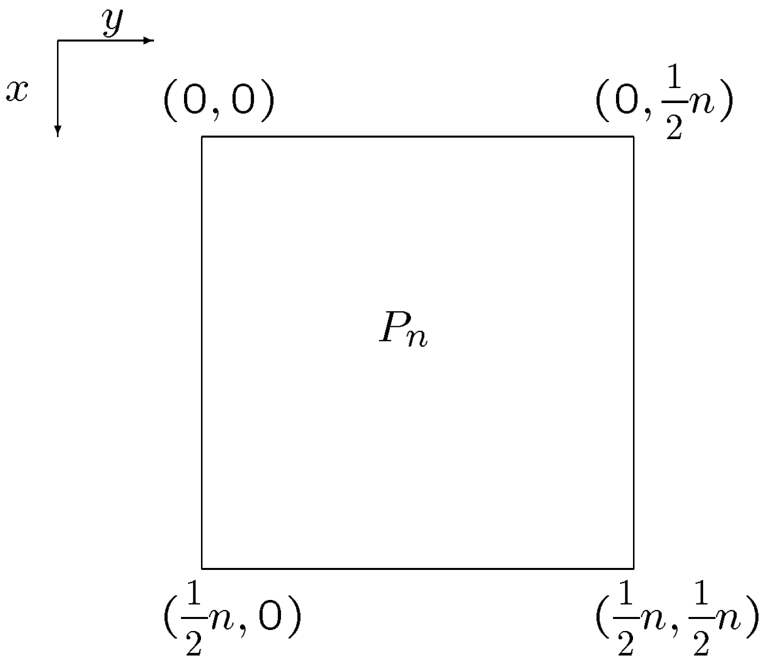
Polynômes d'Ehrhart
pour P_n de dimensions 2 à 4

$$j(n) = Vn^2 + \frac{p}{2}n + 1$$

$$j(n) = Vn^3 + \frac{S}{2}n^2 + \left(i + \frac{p}{2} - V\right)n + 1$$

$$j(n) = Vn^4 + \frac{S}{2}n^3 + \left(i + \frac{p}{2} - V - 1\right)n^2 + \frac{p-S}{2}n + 1$$

Exemple simple



$$H_n \begin{cases} 0 \le x \le \frac{1}{2}n \\ 0 \le y \le \frac{1}{2}n \end{cases}$$

Produit eulérien

$$\begin{aligned} \Pi(t) &= (1-t)(1-t^2)^3 \\ &= 1 - t - 3t^2 + 3t^3 + 3t^4 - 3t^5 - t^6 + t^7 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **Relation de récurrence eulérienne**

$$j(n)-j(n-1)-3j(n-2)+3j(n-3)+3j(n-4)$$
$$-3j(n-5)-j(n-6)+j(n-7)=0$$

$\Rightarrow$ **Valeurs initiales**

De P_0 à P_6, $j(n) = 1, 1, 4, 4, 9, 9, 16$

$\Rightarrow$ **Calcul du terme général de la récurrence**

Fonction Maple `rsolve`, pseudo-polynôme

$$j(n) = \frac{1}{4}n^2 + \left[\frac{1}{2}, 1\right] n + \left[\frac{1}{4}, 1\right]$$

Autre méthode de calcul :
Résolution d'un système linéaire

$\mapsto$ Théorême fondamental
$\Rightarrow$ Forme du polynôme

$\mapsto$ Nombre de coefficients (= inconnues)
= nombre de valeurs initiales

Extension à un nombre quelconque de paramètres

Systèmes homothétiques H_N

$$N = (n_1, n_2, \ldots, n_q)$$

$$\sum a_i x_i = \sum b_j n_j \qquad \sum a_i x_i < \sum b_j n_j \qquad \sum a_i x_i \leq \sum b_j n_j$$

$H_1 \Rightarrow$ Domaine polyédrique borné $P_{1,1,\ldots,1}$

$\Rightarrow$ **Tout** $P_{0,0,\ldots,0,n_j,0,\ldots,0}$ **correspond à** $P_{0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0}$ **par l'homothétie de centre** O **et de rapport** n_j

Systèmes bordés B_N

$$N = (n_1, n_2, \ldots, n_q)$$

$$\sum a_i x_i = \sum b_j n_j + c \qquad \sum a_i x_i < \sum b_j n_j + c$$
$$\sum a_i x_i \leq \sum b_j n_j + c$$

a_i, b_j : entiers x_i : variables n_j : paramètres entiers positifs

c : rationnel

Nombres périodiques $u(N)$

Définis par **un tableau à q dimensions**

Valeur déterminée sur chaque dimension d
par le modulo du paramètre n_d
par rapport
au nombre de valeurs possibles p_d

Exemple :

$$(-1)^{n-m} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{n,m}$$

$$ppcm \text{ des } p_d = \text{période de } u(N)$$

$\Rightarrow$ **Polynômes et pseudo-polynômes à plusieurs variables**

$$\sum_{i_1=0}^{k} \sum_{i_2=0}^{k} \cdots \sum_{i_q=0}^{k} c_{i_1,i_2,\ldots,i_q} \; n_1^{i_1} n_2^{i_2} \ldots n_q^{i_q}$$

Théorême fondamental étendu

Nombre de points entiers j_N de tout polytope P_N de dimension k

Exprimé sur plusieurs domaines adjacents de valeurs des paramètres $N = (n_1, n_2, \ldots, n_q)$

P_N **entier :**
polynômes en $n_1, n_2, \ldots, n_q$ **de degré** k

P_N **rationnel :**
pseudo-polynômes en $n_1, n_2, \ldots, n_q$ **de degré** k **et de pseudo-période égale au dénominateur de** P_N

Exprimés sur plusieurs domaines adjacents ?

$\mapsto$ Un polytope défini par un système de contraintes de la forme

$$\sum a_i x_i \leq \sum b_j n_j + c$$

est **homothétique-bordé par domaines adjacents de valeurs des paramètres**

$\mapsto$ Les sommets paramétriques sont **constants sur ces domaines** (Loechner & Wilde)

Coordonnées de la forme $\sum e_i n_i + f$, e_i et f rationnels.

Méthode de calcul automatique des polynômes d'Ehrhart d'un polytope paramétrique

Enoncé initial

▷ Système de contraintes linéaires de la forme $\sum a_i x_i \leq \sum b_j n_j + c$

1. Calcul des coordonnées paramétriques des sommets et des domaines associés de valeurs des paramètres

▷ Algorithme de Loechner & Wilde : basé sur la représentation du polytope dans l'espace des paramètres

$\Rightarrow$ Plusieurs polytopes homothétiques-bordés (1 par domaine)

$\Rightarrow$ Dénominateurs du polytope sur chaque domaine

$\Rightarrow$ Forme du polynôme d'Ehrhart sur chaque domaine

2. Calcul des coefficients des polynômes d'Ehrhart

▹ Comptage d'un nombre suffisant de valeurs initiales pour de petites valeurs des paramètres

$\Rightarrow$ Boucle de parcours du polytope (détermination par Fourier-Motzkin)

▹ Résolutions de systèmes linéaires symboliques

Minimisation du nombres d'inconnues : Résultat d'Ehrhart

$$j(n) = u_k(n)n^k + u_{k-1}(n)n^{k-1} + \ldots + u_0(n)$$

Si $\exists\ q \in [0..k]$ tel que,

Tous les sous-espaces contenant une face de dimension q contiennent au moins un point entier

alors $\forall p \geq q$,

$u_p(n)$ **est constant (de période 1)**

Un exemple ...

Nombre de solutions entières (x,y) de

$$H_{n,t}\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{t-1}{2} \\ 0 \leq y \leq \frac{t-2x-1}{2} \\ x+y \geq t-n-1 \\ 1 \leq t \leq 2n+1 \end{cases}$$

▷ Calcul des sommets paramétriques :

Si $1 \leq t \leq n+1 \mapsto$ **domaine (1) :**

$$(t-n-1,0),\ (\tfrac{t-1}{2},0),\ (0,t-n-1),\ (0,\tfrac{t-1}{2})$$

Si $n+1 \leq t \leq 2n+1 \mapsto$ **domaine (2) :**

$$(\tfrac{t-1}{2}),\ (0,\tfrac{t-1}{2}),\ (0,0)$$

$\Rightarrow$ Polynôme d'Ehrhart
sur le domaine (1) de la forme :

$$j(n,t) = c_1 t^2 + [c_2, c_3]t + [c_4, c_5]$$

$$\text{avec} \begin{cases} c_1 + c_2 + c_4 & = j(n,1) \\ 4c_1 + 2c_3 + c_5 & = j(n,2) \\ 9c_1 + 3c_2 + c_4 & = j(n,3) \\ 16c_1 + 4c_3 + c_5 & = j(n,4) \\ 25c_1 + 5c_2 + c_4 & = j(n,5) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Calcul de $j(n,1), \ldots, j(n,5)$
de la forme : $c_1 t^2 + [c_2, c_3]t + [c_4, c_5]$

$\Rightarrow$ Comptage de 5 valeurs initiales
avec la boucle de parcours :

```
init_val := 0;
for x := 0 to (t-1)/2
    for y := max(0,t-n-x-1) to (t-2*x-1)/2
        init_val := init_val + 1;
```

Par exemple, calcul de $j(n,1)$:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_4 & = j(1,1) & = 1 \\ 4c_1 + 2c_3 + c_5 & = j(2,1) & = 1 \\ 9c_1 + 3c_2 + c_4 & = j(3,1) & = 1 \\ 16c_1 + 4c_3 + c_5 & = j(4,1) & = 1 \\ 25c_1 + 5c_2 + c_4 & = j(5,1) & = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow j(n,1) = 1$$

De même, $j(n,2) = 1$, $j(n,3) = 3$, $j(n,4) = 4$, $j(n,5) = 6$

$\Rightarrow$ **Sur le domaine (1),**

$$\forall\ t \in [1..n+1],$$

$$j(n,t) = \frac{1}{8}t^2 + \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]_t t + \left[\frac{3}{8}, 0\right]_t$$

$\Rightarrow$ De même, **sur le domaine (2),**

$$\forall\ t \in [n+1..2n+1],$$

$$j(n,t) = nt - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{3}{8}t^2 + \left[1, \frac{3}{4}\right]_t t + \left[\frac{3}{8}, 0\right]_t$$

Premiers résultats d'Ehrhart sur une classe plus large d'équations

Résultats en 2 dimensions et 1 paramètre, équations de la forme :

$$Q + nQ' > 0$$

où Q et Q' de la forme $ax + by + c$
a, b, c entiers, $n \geq 0$

$\triangleright$ 2 cas pour ce type d'équations quand $n \to \infty$:

$\mapsto$ P_n tend vers un domaine fixe
$\Rightarrow$ **dénombrant constant**

$\mapsto$ P_n tend vers un domaine infini
$\Rightarrow$ au moins un **sommet fuyant**
$\rightarrow$ **Fuite sur une droite, une hyperbole ou une parabole**

Principes de résolution :

Déduction de P_n
d'un polytope homothétique-bordé P'_n
tel que

$$P'_n \subset P_n$$

Il n'y a pas de points entiers dans $P_n - P'_n$

(asymptotes, tangentes, ...)

Problèmes ouverts :

→ Nombre quelconque de variables

→ Nombre quelconque de paramètres
en coefficients

→ Puissance de paramètres (n^p)

Conclusion

- Pour les systèmes d'équations de la forme $\sum a_i x_i \leq \sum b_j n_j + c$

▹ Travaux d'Eugène Ehrhart
(2 prix de l'académie des sciences)

▹ Extension à un nombre quelconque de paramètres
(domaines de valeurs des paramètres)

▹ Méthode entièrement automatique du nombre de solutions entières
Algorithme de Loechner & Wilde
Fourier-Motzkin
Résolution de systèmes linéaires

▹ Implémentation en cours … (Wilde)

- Nombreux problèmes ouverts